Analisi Funzionale 1 - a.a. 2012/2013

Quarto appello

Esercizio 1

Siano E ed F spazi di Banach e B_E la palla unitaria chiusa di centro 0 in E.

1. Si provi che $\mathcal{K}(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Si provi che $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è compatto se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio V_ε di E di dimensione finita tale che
$$\operatorname{dist}\big(Tx, T(V_\varepsilon)\big) < \varepsilon \qquad \forall\, x \in B_E\,.$$
3. Si provi che se E è riflessivo e $T \in \mathcal{K}(E,F)$, allora $T(B_E)$ è compatto in F.

Svolgimento

1. Omesso.
2. *Necessità.* Sia $T \in \mathcal{K}(E,F)$, cosicché $T(B_E)$ è totalmente limitato. Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $x_1, \ldots, x_n \in B_E$ tali che
$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(Tx_i)\,.$$
Posto $V_\varepsilon = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, la conclusione segue immediatamente.

   Sufficienza. Siano $\varepsilon > 0$ fissato, V_ε come nell'ipotesi e
$$K_\varepsilon \doteq \big\{y \in T(V_\varepsilon) : \exists\, x \in B_E : \|y - Tx\| < \varepsilon\big\}\,.$$
Essendo $T(V_\varepsilon)$ di dimensione finita e $T(B_E)$ limitato, K_ε è totalmente limitato, e quindi esistono $y_1, \ldots, y_n \in K_\varepsilon$ tali che
$$K_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)\,.$$
Se $x \in B_E$, esiste $y \in V_\varepsilon$ tale che $\|Tx - y\| < \varepsilon$, e quindi $y \in K_\varepsilon$. Sia ora y_i tale che $\|y - y_i\| < \varepsilon$. Si ottiene che $\|Tx - y_i\| < 2\varepsilon$, e quindi
$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{2\varepsilon}(y_i)\,,$$
da cui la conclusione che $T(B_E)$ è totalmente limitato (e che T è compatto) grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
3. Sia $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in B_E$ per ogni n, successione in $T(B_E)$. Essendo T compatto, essa ammette una sottosuccessione $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente in F ad un elemento y. Essendo $\{x_{n_k}\}$ successione in B_E ed E riflessivo, questa a sua volta ammette una sottosuccessione $\{x_{n_{k_h}}\}_{h\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente ad un elemento $x \in B_E$. Allora $Tx_{n_{k_h}} \rightharpoonup Tx$, e quindi $y = Tx$, da cui la conclusione.

Esercizio 2

1. Si enunci il teorema di Kolmogorov-Riesz-Frechét di compattezza in spazi L^p.

Si definisca

$$H^1(0,1) \doteq \left\{u \in \mathcal{C}^0([0,1]) : u \text{ è assolutamente continua e } u' \in L^2(0,1)\right\}.$$

2. Provare che

$$(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt + \int_0^1 u'(t)v'(t)\,dt\,, \qquad u,v \in H^1(0,1)\,,$$

   definisce un prodotto scalare che rende $H^1(0,1)$ uno spazio di Hilbert.

3. Provare che l'immersione $\iota : H^1(0,1) \to L^2(0,1)$ è compatta.

4. Dedurre che data $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(0,1)$, se $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(0,1)$, allora $u_n \to u$ in $L^2(0,1)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. La linearità discende direttamente dalla linearità dell'integrale. La simmetria discende dal fatto che il prodotto in $\mathbb{R}$ è commutativo. Quanto alla positività, si ha

$$(u,u) = \|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|u'\|^2_{L^2(0,1)} \geq 0\,.$$

   Inoltre, se $(u,u)=0$, si ha
$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} = \|u'\|^2_{L^2(0,1)} = 0\,,$$
   da cui $u \equiv 0$, essendo u assolutamente continua. Resta da dimostrare che $H^1(0,1)$ è completo rispetto alla norma definita da

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \doteq \sqrt{(u,u)} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|u'\|^2_{L^2(0,1)}}\,.$$

   Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $H^1(0,1)$. Allora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in $L^2(0,1)$ e quindi convergono rispettivamente a u e g. Per concludere è sufficiente dimostrare che esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [0,1]\,.$$

   Sia $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad u quasi ovunque, e sia $x_0 \in [0,1]$ tale che
$$u_{n_k}(x_0) \to u(x_0)\,.$$
   Allora, poiché la convergenza $L^2(0,1)$ implica quella $L^1(0,1)$, si ha

$$u(x) = \lim_{k\to+\infty} u_{n_k}(x) = \lim_{k\to+\infty}\left[u_{n_k}(x_0) + \int_{x_0}^x u_{n_k}'(t)\,dt\right] = u(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)\,dt$$

   per q.o. $x \in [0,1]$, da cui la conclusione perché u coincide q.o. con una funzione assolutamente continua.

3. Data $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione limitata in $H^1(0,1)$, bisogna provare che $\{\iota(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente in $L^2(0,1)$. Poiché $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $H^1(0,1)$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate in $L^2(0,1)$, perché

$$\|u_n\|_{L^2(0,1)}\,,\, \|u_n'\|_{L^2(0,1)} \le \|u_n\|_{H^1(0,1)}$$

per come è definito il prodotto scalare in $H^1(0,1)$. Sia $C > 0$ tale che $\|u_n\|_{H^1(0,1)} \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si osservi che, essendo

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt\,,$$

integrando tra 0 e 1 e sfruttando il fatto che

$$\|f\|_{L^1(0,1)} \le \|f\|_{L^2(0,1)} \qquad \forall\, f \in L^2(0,1)\,,$$

si ha

$$|u_n(0)| = \left|\int_0^1 u_n(x)\,dx - \int_0^1\int_0^x u_n'(t)\,dt\right| \le \|u_n\|_{L^1(0,1)} + \|u_n'\|_{L^1(0,1)} \le C \tag{1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questo punto si può procedere in due modi.

(a) Usiamo il teorema di Kolmogorov-Riesz-Frechét. Estendiamo ciascuna u_n a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $u_n(x) = 0$ per $x \notin [0,1]$. Sia $\tau_h u_n(x) = u_n(x+h)$. Per $h < 0$ si ha

$$\begin{aligned}\|\tau_h u_n - u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u_n(x+h) - u_n(x)|^2\,dx \\ &= \int_0^{-h} |u_n(x)|^2\,dx + \int_{-h}^1 |u_n(x+h) - u_n(x)|^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{-h} |u_n(x)|^2\,dx &= \int_0^{-h} \left|u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt\right|^2\,dx \le \int_0^{-h}\left(|u_n(0)| + \int_0^{-h} |u_n'(t)|\,dt\right)^2 \\ &\le |h|\left(|u_n(0)| + \int_0^1 \chi_{[0,-h]}(t)|u_n'(t)|\,dt\right)^2 \\ &\le |h|\big(|u_n(0)| + \sqrt{|h|}\|u_n'\|_{L^2(0,1)}\big)^2 \le |h|\big(1+\sqrt{|h|}\big)^2 C^2\,,\end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}\int_{-h}^1 |u_n(x+h) - u_n(x)|^2\,dx &= \int_{-h}^1 \left|\int_x^{x+h} u_n'(t)\,dt\right|^2\,dx \\ &\le \int_{-h}^1 \left(\int_0^1 \chi_{[x+h,x]}(t)|u_n'(t)|\,dt\right)^2\,dx \\ &\le |h|\|u_n'\|^2_{L^2(0,1)} \le C^2|h|\,.\end{aligned}$$

Considerazioni del tutto analoghe valgono per $h > 0$. Se ne deduce che

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \qquad \text{uniformemente in } n\,,$$

e quindi grazie al teorema di Kolmogorov-Riesz-Frechét $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente in $L^2(0,1)$.

(b) Da (1) si ottiene

$$|u_n(x)| \leq |u_n(0)| + \left| \int_0^x u_n'(t)\, dt \right| \leq C + \|u_n'\|_{L^1(0,1)} \leq 2C\,,$$

e quindi la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è puntualmente equilimitata. Inoltre, usando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\big|u_n(x) - u_n(y)\big| = \left| \int_x^y u_n'(t)\, dt \right| =\leq \sqrt{|x-y|}\|u_n'\|_{L^2(0,1)} \leq C\sqrt{|x-y|}\,,$$

e quindi $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione equicontinua. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, essa ammette una sottosuccessione uniformemente convergente in $[0,1]$. Evidentemente tale sottosuccessione converge anche in $L^2(0,1)$ perché l'immersione di $\mathcal{C}^0([0,1])$ in $L^2(0,1)$ è continua.

4. È possibile procedere in due modi.

(a) Se la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente ad u in $H^1(0,1)$, essa è limitata nella norma di $H^1(0,1)$, e quindi, fissata una sua qualsiasi sottosuccessione, questa ha a sua volta una sottosuccessione che converge fortemente in $L^2(0,1)$, essendo l'immersione compatta. Poiché $H^1(0,1) \subseteq L^2(0,1)$, tale sottosuccessione non può che convergere ad u. Poiché il limite è unico, l'intera successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente in $L^2(0,1)$.

(b) Per un risultato fatto a lezione è noto che, se E ed F sono spazi di Banach, $T \in \mathcal{K}(E,F)$ e $u_n \rightharpoonup u$ in E, allora $Tu_n \to Tu$ in F. Posto $E = H^1(0,1)$, $F = L^2(0,1)$ e $T = \iota$, la conclusione segue immediatamente

Esercizio 3

Sia E spazio di Banach.

1. Provare che se $S, T \in \mathcal{L}(E)$, allora $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

2. Dedurre che $S \in \mathcal{L}(E)$ è biiettiva se e solo se tale è S^* e vale $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

3. Provare che se V è sottospazio chiuso di E ed esiste $S \in \mathcal{L}(E, V)$ biiettiva, allora $V = E$.

4. Provare che se $S \in \mathcal{L}(E)$ ed esiste $c > 0$ tale che $\|Sx\| \geq c\|x\|$ per ogni $x \in E$, allora S è suriettiva.

5. Sia ora H spazio di Hilbert con norma $|\cdot|$. Provare che, detto $\sigma(T)$ lo spettro di $T \in \mathcal{L}(H)$, allora $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in H tale che $|x_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per cui
$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda x_n - Tx_n| = 0\,.$$

Svolgimento

1. Per ogni $f \in E^*$ e $x \in E$ si ha

$$\langle (S\circ T)^* f, x\rangle_{E^*,E} = \langle f, S\circ Tx\rangle_{E^*,E} = \langle S^* f, Tx\rangle_{E^*,E} = \langle T^*\circ S^* f, x\rangle_{E^*,E}\ ,$$

da cui la conclusione.

2. Da quanto provato precedentemente si deduce che

$$(S \circ S^{-1})^* = (S^{-1})^* \circ S^* \,, \qquad (S^{-1} \circ S)^* = S^* \circ (S^{-1})^* \,.$$

La conclusione segue facilmente perché banalmente $(I_E)^* = I_{E^*}$, dove I_E e I_{E^*} indicano le mappe identiche di E ed E^*, rispettivamente.

3. Sia $f \in E^*$ tale che $f\big|_V \equiv 0$. Procedendo come sopra si prova che S^* è biiettiva. Sia $\varphi \in V^*$ tale che $S^*\varphi = f$. Si ottiene che per ogni $x \in E$ si ha

$$0 = \langle f, Sx \rangle = \langle S^*\varphi, Sx \rangle = \langle S^* \circ S^*\varphi, x \rangle \,,$$

dove si è sfruttato il fatto che $S^*\varphi \in E^* \subseteq V^*$. Allora $S^* \circ S^*\varphi = 0$, e quindi $f = S^*\varphi = 0$, per l'iniettività di S^*. Allora l'unico funzionale lineare e continuo su E nullo su V è quello nullo, e questo basta a concludere che $V = E$.

4. Osserviamo innanzitutto che S è banalmente iniettiva. Inoltre $S(E)$ è chiuso. Infatti, se $Sx_n \to y$ in E, allora

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|Sx_n - Sx_m\| \,,$$

e quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in E. Detto x il suo limite, che esiste perché E è completo, si ha $Sx = y$, essendo S continua. Allora S è una biiezione tra E ed $S(E)$, e quindi grazie al punto precedente si conclude che $S(E) = E$.

5. *Necessità.* Sia $\lambda \in \sigma(T)$. Se $\lambda I - T$ non è iniettiva, si conclude immediatamente perché esiste $x \in H$, $|x| = 1$, tale che $\lambda x - Tx = 0$. La successione cercata è allora data da $x_n = x$ per ogni n. Sia ora $\lambda I - T$ iniettiva e assumiamo per assurdo che non esista una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di norma 1 per cui $|\lambda x_n - Tx_n| \to 0$. Allora

$$\inf_{|x|=1} |\lambda x - Tx| = c > 0 \,,$$

e quindi

$$|\lambda x - Tx| \geq c|x| \qquad \forall\, x \in H \,. \tag{2}$$

Grazie al punto precedente si ottiene che $\lambda I - T$ è suriettiva e quindi che $\lambda \notin \sigma(T)$.

Sufficienza. Se, per assurdo, $\lambda I - T$ fosse biiettiva, allora per il teorema della mappa aperta avrebbe inversa continua e quindi esisterebbe $c > 0$ che verifica (2), da cui

$$|\lambda x - Tx| \geq c > 0 \qquad \forall\, x \in H \,,\ |x| = 1 \,,$$

contro l'ipotesi.