

Analisi Funzionale 1 - a.a. 2013/2014

Primo appello

Esercizio 1

1. È vero o falso che data $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ esiste una successione $\{p_n\}_{n \geq 1}$ di polinomi tale che $p_n \rightarrow f$ uniformemente in ogni intervallo limitato $[a, b]$? Giustificare la risposta.
2. È vero o falso che data $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ esiste una successione $\{p_n\}_{n \geq 1}$ di polinomi tale che $p_n \rightarrow f$ uniformemente in $\mathbb{R}$? Giustificare la risposta.
3. Dimostrare che i polinomi sono densi in $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ dotato della norma $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Svolgimento

1. È vero. Grazie al teorema di Stone-Weierstrass, data $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, per ogni $n \geq 1$ esiste un polinomio p_n tale che

$$\|p_n - f\|_{L^\infty(-n, n)} < 1/n.$$

Ora, fissato $[a, b]$ ed $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > 1/\varepsilon$ e $[a, b] \subseteq [-N, N]$. Per costruzione

$$\|p_n - f\|_{L^\infty(a, b)} < 1/N < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

2. È falso. Presa $f(x) = e^x$, si ha

$$\|f - p\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = +\infty$$

per ogni polinomio p .

3. Dati $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ e $\varepsilon > 0$, essendo f' continua, grazie al teorema di Stone-Weierstrass troviamo un polinomio p tale che

$$\|p - f'\|_{L^\infty(0, 1)} < \varepsilon.$$

Allora

$$P(x) = f(0) + \int_0^x p(t) dt$$

è un altro polinomio che verifica

$$|P(x) - f(x)| = \left| \int_0^x p(t) dt - \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |p(t) - f'(t)| dt \leq \|p - f'\|_{L^\infty(0, 1)} < \varepsilon,$$

e si conclude

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il teorema sulle proiezioni ortogonali in spazi di Hilbert.
2. Sia

$$V = \{g \in L^2(\mathbb{R}) : g \text{ è pari a meno di insiemi di misura nulla}\}.$$

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, si dimostri che esiste un'unica funzione $g_0 \in V$ tale che

$$\|f - g_0\|_2 = \min_{g \in V} \|f - g\|_2.$$

Determinare esplicitamente g_0 .

Svolgimento

1. Omesso.
2. V è un sottospazio vettoriale chiuso di $L^2(\mathbb{R})$ perché se $g_n \rightarrow g$ in L^2 , $g_n \in V$, si ha $g_n \rightarrow g$ q.o. a meno di sottosuccessioni, e quindi g è pari a meno di insiemi di misura nulla essendo tali le g_n . Per il teorema sulle proiezioni ortogonali si ha che $g_0 = P_V f$, e quindi deve essere verificata

$$0 = (f - g_0, g) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g_0(x))g(x) dx \quad \forall g \in V.$$

Scrivendo f come somma di una funzione pari e di una dispari,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{\text{pari}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{\text{dispari}}.$$

Posto

$$g_0(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

si trova per $g \in V$

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g_0(x))g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(-x)]g(x) dx = 0,$$

essendo la funzione $x \mapsto [f(x) - f(-x)]g(x)$ dispari perché prodotto di una funzione dispari con una pari.

Esercizio 3

1. Si enunci il teorema di Ascoli-Arzelà e si dimostri la parte riguardante la necessità.
2. Sia $K \in C^0([0, 2])$ positiva, strettamente decrescente e tale che $K(0) = 1$. Provare che per ogni $f \in C^0([0, 1])$ esiste un'unica funzione $u \in C^0([0, 1])$ tale che

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x+y)u(y) dy \quad \forall x \in [0, 1].$$

Svolgimento

1. L'enunciato del teorema è omesso. Per la dimostrazione della necessità, siano (X, d) spazio metrico $\mathcal{F} \subset C^0(X)$ relativamente compatto. Allora $\mathcal{F}$ è totalmente limitato, e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(f_i),$$

dove $B_\varepsilon(f_i)$ è la palla di raggio ε e centro f_i in $C^0(X)$. Siano ora $f \in \mathcal{F}$ e $x_0 \in X$ fissati, e sia $\delta > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta \implies |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sia $f_j \in \{f_1, \dots, f_n\}$ tale che $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon$. Allora, se $d(x, x_0) < \delta$, si ha

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(x_0)| + |f_j(x_0) - f(x_0)| \leq 2\|f - f_j\|_\infty + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

da cui l'equicontinuità degli elementi di $\mathcal{F}$.

2. Si osservi preliminarmente che $0 \leq K(z) \leq 1$ per ogni $z \in [0, 2]$ e che K è uniformemente continua. Possiamo procedere in tre modi.

(a) Utilizziamo il teorema dell'alternativa di Fredholm in spazi di Hilbert così come è stato enunciato a lezione. Definiamo $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ come

$$Tu(x) = \int_0^1 K(x+y)u(y) dy. \quad (1)$$

T è ben definito per ogni $u \in L^2(0, 1)$, essendo

$$|K(x+y)u(y)| \leq |u(y)| \in L^2(0, 1),$$

e Tu continua grazie alla continuità di K ed al teorema della convergenza dominata. Inoltre T è banalmente lineare. Dimostriamo che è compatto, in modo da poter usare il teorema dell'alternativa di Fredholm. L'idea è provare che $T(B_{L^2(0,1)})$ è relativamente compatto in $\mathcal{C}^0([0, 1])$. Dimostrato questo, la compattezza di T segue dal fatto che l'immersione di $\mathcal{C}^0([0, 1])$ in $L^2(0, 1)$ è continua. Che $T(B_{L^2(0,1)})$ sia limitato in $\mathcal{C}^0([0, 1])$ è banale perché se $u \in B_{L^2(0,1)}$, allora

$$|Tu(x)| \leq \int_0^1 K(x+y)|u(y)| dy \leq \|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} \leq 1,$$

da cui $\|Tu\|_\infty \leq 1$. Dimostriamo ora che $T(B_{L^2(0,1)})$ è una famiglia equicontinua. Fissato $\varepsilon > 0$, essendo K uniformemente continua, troviamo $\delta > 0$ tale che

$$|z_1 - z_2| < \delta \implies |K(z_1) - K(z_2)| < \varepsilon, \quad z_1, z_2 \in [0, 2].$$

Dati $x_1, x_2 \in [0, 1]$, per ogni $y \in [0, 1]$ si ha

$$\delta > |x_1 - x_2| = |(x_1 + y) - (x_2 + y)| \implies |K(x_1 + y) - K(x_2 + y)| < \varepsilon.$$

Allora, se $|x_1 - x_2| < \delta$, si trova

$$|Tu(x_1) - Tu(x_2)| \leq \int_0^1 |K(x_1 + y) - K(x_2 + y)||u(y)| dy < \varepsilon \|u\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon,$$

e si conclude. Per dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione data, per il teorema di Fredholm è sufficiente dimostrare che $\ker(I - T) = \{0\}$, dove I è l'identità di $L^2(0, 1)$. Infatti, se u risolve l'equazione, allora è necessariamente continua, essendo tali f e Tu . Sia allora u soluzione di $u = Tu$. Allora

$$|u(x)| \leq \int_0^1 K(x+y)|u(y)| dy \leq \|u\|_{L^1(0,1)},$$

da cui $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$. Poiché la disuguaglianza opposta deriva dal fatto che $L^\infty(0, 1)$ si immerge in modo continuo in $L^1(0, 1)$, si ha $\|u\|_\infty = \|u\|_1$. Si noti che u è continua, essendo tale Tu . Inoltre, se fosse $|u(x)| < \|u\|_\infty$ in un insieme di misura positiva, allora $\|u\|_1 < \|u\|_\infty$. Ne consegue che, essendo continua, u è costante, diciamo $u(x) \equiv c$. Per fissare le idee supponiamo $c > 0$. Allora

$$c = \int_0^1 K(x+y)c dy \quad \forall x \in [0, 1],$$

da cui $c = 0$, e quindi $u(x) \equiv 0$. Quindi $\ker(I - T) = \{0\}$ e si conclude.

- (b) Utilizziamo il teorema dell'alternativa di Fredholm in spazi di Banach. Definiamo $T : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$ come in (1). In modo del tutto analogo a prima, si dimostra che T è un operatore compatto e che $\ker(I - T) = \{0\}$, e si conclude.
- (c) Utilizziamo strumenti diversi da quelli forniti durante il corso. Data $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, definiamo $F : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$ come

$$Fu(x) = f(x) + \int_0^1 K(x+y)u(y) dy.$$

Proviamo che F è una contrazione, cosicché poi si può concludere con il lemma di Banach-Caccioppoli, essendo $\mathcal{C}^0([0, 1])$ completo per la norma della convergenza uniforme.. Poiché K è positiva e decrescente si ha

$$\begin{aligned} |Fu(x) - Fv(x)| &\leq \int_0^1 K(x+y)|u(y) - v(y)| dy \leq \left(\int_x^{x+1} K(z) dz \right) \|u - v\|_\infty \\ &\leq \left(\int_0^1 K(z) dz \right) \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|Fu - Fv\|_\infty \leq \left(\int_0^1 K(z) dz \right) \|u - v\|_\infty,$$

Essendo $0 \leq K(z) < 1$ per $z \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 K(z) dz < 1,$$

da cui la conclusione.