Analisi Funzionale 1 - a.a. 2013/2014

Secondo appello

Esercizio 1

Siano H spazio di Hilbert ed $\{e_n\}_{n \geq 1}$ una sua base hilbertiana.

1. Si dia la definizione di risolvente e spettro di un operatore lineare e si enunci il teorema di caratterizzazione dello spettro di un operatore compatto in uno spazio di Hilbert.

2. Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ tale che

$$\sum_{n \geq 1} \|T(e_n)\|^2 < +\infty.$$

Dimostrare che T è compatto.

3. Provare che il viceversa non è vero, cioè che esiste uno spazio di Hilbert H ed un operatore $T \in \mathcal{K}(H)$ tale che

$$\sum_{n \geq 1} \|T(e_n)\|^2 = +\infty$$

per una opportuna base hilbertiana $\{e_n\}_{n \geq 1}$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Sia $T_n \in \mathcal{L}(H)$ definito da

$$T_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) T e_k.$$

Allora $T_n \in \mathcal{K}(H)$, avendo rango finito. Inoltre, utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\begin{aligned} \|T_n x - T x\| &= \left\| \sum_{k \geq n+1} (x, e_k) T e_k \right\| \leq \sum_{k \geq n+1} |(x, e_k)| \|T e_k\| \\ &\leq \left(\sum_{k \geq n+1} |(x, e_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \geq n+1} \|T e_k\|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| \left(\sum_{k \geq n+1} \|T e_k\|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

da cui $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{L}(H)$, e si conclude.

3. Si consideri $H = \ell^2(\mathbb{N})$, $e_n(k) = \delta_{kn}$ e si definisca

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n \geq 1} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) \frac{\mathbf{e}_n}{\sqrt{n}}, \quad \mathbf{x} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

L'operatore è ben definito perché la serie converge assolutamente in $\ell^2(\mathbb{N})$ essendo $\mathbf{x} = \{(\mathbf{x}, e_n)\}_{n \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Inoltre vale $T(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n/\sqrt{n}$, $n \geq 1$. Posto

$$T_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) \frac{\mathbf{e}_k}{\sqrt{k}}, \quad \mathbf{x} \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

si dimostra che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$, perché

$$\|T(\mathbf{x}) - T_n(\mathbf{x})\|^2 = \left\| \sum_{k \geq n+1} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) \frac{\mathbf{e}_k}{\sqrt{k}} \right\|^2 = \sum_{k \geq n+1} \frac{|(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k)|^2}{k} \leq \frac{1}{n+1} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Quindi T è compatto perché limite di operatori di rango finito, ma

$$\sum_{n \geq 1} \|T(\mathbf{e}_n)\|^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Esercizio 2

Sia $X \subset \mathbb{R}$ compatto e si doti $\mathcal{C}^0(X)$ della norma della convergenza uniforme, $\|\cdot\|_\infty$.

1. Si provi che se X ha un numero finito di elementi, allora $\mathcal{C}^0(X)$ è riflessivo.
2. Si provi il viceversa, cioè che se $\mathcal{C}^0(X)$ è riflessivo, allora X ha un numero finito di elementi.

Si assuma ora che esista un prodotto scalare su $\mathcal{C}^0(X)$ che rende $\mathcal{C}^0(X)$ uno spazio di Hilbert e tale per cui per ogni $x \in X$ il funzionale lineare

$$\mathcal{C}^0(X) \ni f \mapsto f(x)$$

sia continuo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ definita dal prodotto scalare.

3. Si enunci e dimostri il teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet in spazi di Hilbert
4. Si provi che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \leq C|f|$ per ogni $f \in \mathcal{C}^0(X)$.
5. Dedurre che X ha un numero finito di elementi.

Svolgimento

1. Se X ha un numero finito di elementi, $x_1, x_2, \dots, x_n$, allora $\mathcal{C}^0(X)$ ha dimensione finita essendo generato dalle funzioni $\varphi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$. Avendo dimensione finita, è riflessivo.
2. Supponiamo che X abbia un numero infinito di elementi. Essendo compatto, troviamo una successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ convergente a $x_0 \in X$, e possiamo supporre tale successione strettamente crescente. Fissato $n \geq 1$, sia $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_n, \\ \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} & \text{se } x_n < x < x_{n+1}, \\ 1 & \text{se } x \geq x_{n+1}. \end{cases}$$

Allora $\{f_n\}_{n \geq 1}$ è una successione di funzioni continue e limitate e quindi ammette una sottosuccessione debolmente convergente, essendo $\mathcal{C}^0(X)$ riflessivo. Il limite f soddisfa

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0, \\ 1 & \text{se } x \geq x_0, \end{cases}$$

e quindi $f \notin \mathcal{C}^0(X)$, assurdo.

3. Omesso.

4. Per il teorema di Riesz-Fréchet per ogni $x \in X$ esiste $\varphi_x \in \mathcal{C}^0(X)$ tale che

$$f(x) = (f, \varphi_x) \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(X).$$

Allora $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ è limitata in $\mathcal{C}^0(X)$ per la norma $|\cdot|$. Infatti, la funzione $x \mapsto \varphi_x$ è continua da X a $\mathcal{C}^0(X)$ una volta dotato quest'ultimo spazio della topologia debole che deriva dalla norma hilbertiana, perché se $x_n \rightarrow x_0$ in X , allora

$$(f, \varphi_{x_n}) = f(x_n) \rightarrow f(x_0) = (f, \varphi_{x_0}) \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(X),$$

cosicché $\varphi_{x_n} \rightarrow \varphi_{x_0}$. Essendo X compatto, $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ è debolmente compatto in $\mathcal{C}^0(X)$ e quindi limitato. Se ne deduce che per ogni $x \in X$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^0(X)$ si ha

$$|f(x)| = |(f, \varphi_x)| \leq |\varphi_x| |f| \leq C |f|$$

per qualche $C > 0$ indipendente da x ed f , da cui $\|f\|_\infty \leq C |f|$.

È possibile procedere anche in questo modo. Detto δ_x il funzionale su $\mathcal{C}^0(X)$ tale che $\langle \delta_x, f \rangle = f(x)$, la funzione $x \mapsto \delta_x$ è continua da X in $(\mathcal{C}^0(X))^*$, una volta dotato questo spazio della topologia debole^{*}. Infatti, se $x_n \rightarrow x_0$ in X , allora

$$\langle \delta_{x_n}, f \rangle = f(x_n) \rightarrow f(x_0) = \langle \delta_{x_0}, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(X).$$

Essendo X compatto, l'insieme $\{\delta_x\}_{x \in X}$ è compatto per la topologia debole^{*} in $(\mathcal{C}^0(X))^*$, e quindi limitato, da cui la conclusione.

5. Dal punto precedente e grazie al teorema della mappa aperta si deduce che le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $|\cdot|$ sono equivalenti in $\mathcal{C}^0(X)$. Essendo $(\mathcal{C}^0(X), |\cdot|)$ riflessivo perché di Hilbert, tale è anche $(\mathcal{C}^0(X), \|\cdot\|_\infty)$, e quindi X ha un numero finito di elementi (essendo le norme equivalenti, i duali topologici coincidono e quindi anche i biduali).

Esercizio 3

Siano E spazio di Banach e $A \subset E$ limitato. Provare che A è relativamente compatto se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio V_ε di E di dimensione finita tale che

$$\text{dist}(x, V_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

dove $\text{dist}(x, V_\varepsilon) = \inf\{\|x - y\| : y \in V_\varepsilon\}$ è la distanza di $x \in E$ da V_ε .

Svolgimento

La necessità è facile: se A è totalmente limitato, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $x_1, \dots, x_n \in E$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i).$$

Si vede subito che $V_\varepsilon = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ funziona.

Vediamo la sufficienza. Fissato $\varepsilon > 0$, sia

$$A_\varepsilon = \{y \in V_\varepsilon : \text{dist}(y, A) \leq \varepsilon\}.$$

Poiché A è limitato, tale è anche A_ε . Allora A_ε è un sottoinsieme limitato di uno spazio di dimensione finita ed è quindi totalmente limitato. Siano $y_1, \dots, y_n \in A_\varepsilon$ tali che

$$A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(y_i).$$

Fissato $x \in A$, sia $y \in V_\varepsilon$ tale che $\|x - y\| < \varepsilon$. Allora $y \in A_\varepsilon$, e quindi $y \in B_\varepsilon(y_i)$ per qualche i . Si deduce che $x \in B_{2\varepsilon}(y_i)$ e si conclude.