

Analisi Funzionale 1 - a.a. 2013/2014

Terzo appello

Esercizio 1

Siano H spazio di Hilbert infinito dimensionale separabile e $\{e_n\}_{n \geq 1}$ una sua base hilbertiana. Siano

$$V_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

e $V_n^\perp$ il suo ortogonale.

1. Provare che se $T \in \mathcal{K}(H)$, allora $T(B_H)$ è chiuso.
2. Provare che $T \in \mathcal{L}(H)$ è compatto se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in V_n^\perp \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = 0.$$

Svolgimento

1. Sia $Tx_n \rightarrow y$ in H , $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq B_H$. Essendo H riflessivo, si ha $x_{n_k} \rightharpoonup x \in B_H$ per qualche sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$. Allora $Tx_{n_k} \rightarrow Tx = y$.
2. Sia T compatto. Per ogni $n \geq 1$ sia $x_n \in V_n^\perp$, $\|x_n\| \leq 1$, tale che

$$\|Tx_n\| \geq \sup_{\substack{x \in V_n^\perp \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| - 1/n.$$

Essendo T compatto, si ha $Tx_{n_k} \rightarrow Tx$ con $x_{n_k} \rightharpoonup x$, per qualche sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$. Ma allora

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} V_n^\perp,$$

essendo $V_n^\perp$ chiusi sia forti che deboli e $V_{n+1}^\perp \subset V_n^\perp$. Allora $(x, e_n) = 0$ per ogni n , e quindi $x = 0$ e $\|Tx_n\| \rightarrow 0$, e si conclude.

Sia ora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in V_n^\perp \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = 0.$$

Per ogni $x \in B_H$ si ha

$$\|TP_{V_n}x - Tx\| = \|TP_{V_n^\perp}x\| \leq \sup_{\substack{x \in V_n^\perp \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|,$$

da cui $TP_{V_n} \rightarrow T$ in $\mathcal{L}(H)$, e si conclude perché TP_{V_n} ha rango finito.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri la forma analitica del teorema di Hahn-Banach.

Sia ora data $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si dice che f ha limite essenziale uguale a λ in $x = 0$ e si scrive

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda,$$

se esiste una funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(x) = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e per cui valga

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = \lambda.$$

2. Provare che esiste un funzionale lineare e continuo φ su $L^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\langle \varphi, f \rangle = \operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$$

qualora il limite essenziale esista finito.

3. Provare che tale funzionale non esiste su $L^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Consideriamo l'insieme

$$G = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ esiste finito}\}.$$

G è un sottospazio vettoriale. Infatti, siano $f_1, f_2 \in G$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e si considerino $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ tali che $\tilde{f}_1(x) = f_1(x)$ e $\tilde{f}_2(x) = f_2(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e per cui esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}_1(x) = \lambda_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}_2(x) = \lambda_2.$$

Allora $\alpha \tilde{f}_1 + \beta \tilde{f}_2$ coincide q.o. con $\alpha f_1 + \beta f_2$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \tilde{f}_1(x) + \beta \tilde{f}_2(x) = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

grazie alla linearità del limite. Sia ora $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\langle \varphi, f \rangle = \operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Allora φ risulta essere lineare e facilmente si verifica che $|\langle \varphi, f \rangle| \leq \|f\|_\infty$ per ogni $f \in G$. La conclusione si ottiene applicando il teorema di Hahn-Banach.

3. Un tale funzionale φ non può essere continuo per la topologia di L^1 . Per provarlo, sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una successione di funzioni continue a supporto compatto tali che $f_n(0) = 1$ e $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$, ad esempio

$$f_n(x) = \chi_{[-1/n, 1/n]}(1 - n|x|).$$

Allora $\langle \varphi, f_n \rangle = 1$ per ogni n , mentre $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$, e si conclude.

Esercizio 3

1. Si enuncino i teoremi di Banach-Steinhaus e della mappa aperta.

Siano E ed F spazi di Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e T^* il suo operatore aggiunto.

2. Provare che se $\text{im } T$ è chiuso, allora anche $\text{im } T^*$ è chiuso.
3. Provare che se $T \in \mathcal{K}(E, F)$, allora $\overline{\text{im } T}$ è separabile.
4. Provare che se $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $\text{im } T$ è chiuso, allora T ha rango finito.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Supponiamo $\text{im } T$ chiuso, e sia $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset F^*$ tale che $T^*f_n \rightarrow \varphi$ in E^* . Allora

$$\langle \varphi, x \rangle_{E^*, E} = \lim_n \langle T^*f_n, x \rangle_{E^*, E} = \lim_n \langle f_n, Tx \rangle_{F^*, F},$$

e quindi $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset F^*$ converge puntualmente in $\text{im } T$. Essendo $\text{im } T$ chiuso ed F di Banach, il teorema di Banach-Steinhaus ci assicura che il limite puntuale ψ appartiene a $(\text{im } T)^*$. In particolare, ψ definisce un funzionale lineare e continuo da $\text{im } T$ in $\mathbb{R}$, e quindi per Hahn-Banach può essere esteso ad un funzionale lineare a continuo su F . Chiamiamo ancora ψ tale funzionale. Per definizione si ha

$$\langle \varphi, x \rangle_{E^*, E} = \langle \psi, Tx \rangle_{F^*, F} = \langle T^*\psi, x \rangle_{E^*, E},$$

e quindi $\varphi = T^*\psi$, da cui la chiusura di $\text{im } T^*$.

3. Si osservi che se $A \subseteq F$ è totalmente limitato, allora è separabile. Infatti, per ogni $n \geq 1$, siano $x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n \in A$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k(n)} B_{1/n}(x_j^n).$$

Allora

$$\bigcup_{n \geq 1} \{x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n\}$$

è un insieme numerabile denso in A . Infatti, fissato $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, si sceglie $n \geq 1$ tale che $1/n < \varepsilon$. Allora esiste x_j^n tale che $\|x - x_j^n\| < 1/n$, e si conclude. A questo punto si scrive $\overline{\text{im } T}$ come unione numerabile di insiemi totalmente limitati (immagini delle palle chiuse di E di centro 0 e raggio $n \neq 1$), e si conclude.

4. Poiché $\text{im } T$ è chiuso ed F completo, $\text{im } T$ stesso è uno spazio di Banach e quindi la restrizione di T ad $\text{im } T$,

$$\tilde{T} : E \rightarrow \text{im } T, \quad \tilde{T}x = Tx,$$

è una mappa aperta essendo continua e suriettiva. Allora che $T(B_1^E(0))$ contiene una palla aperta di $\text{im } T$, palla aperta che risulta essere relativamente compatta essendo tale $T(B_1^E(0))$. Ne consegue che necessariamente $\text{im } T$ ha dimensione finita.

Esercizio 4

Siano E uno spazio di Banach, V un suo sottospazio e si definisca

$$V^\perp = \{f \in E^* : \langle f, v \rangle = 0 \ \forall v \in V\}.$$

1. Si provi che $V^\perp$ è chiuso nella topologia debole* di E^* .
2. Fissata $f_0 \in E^*$, si provi che esiste $g_0 \in V^\perp$ tale che $\|f_0 - g_0\| = \inf_{g \in V^\perp} \|f_0 - g\|$.

Svolgimento

1. Proviamo che $E^* \setminus V^\perp$ è aperto. Se $f_0 \in E^* \setminus V^\perp$, esiste $v \in V$ tale che $\langle f_0, v \rangle \neq 0$. Per fissare le idee assumiamo che $\langle f_0, v \rangle > 0$. Allora

$$W = \{f \in E^* : \langle f, v \rangle > 0\}$$

è un aperto per la topologia $\sigma(E^*, E)$ contenente f_0 e contenuto in $E^* \setminus V^\perp$, che quindi risulta aperto.

2. Proviamo che la mappa $E^* \ni g \mapsto \|f_0 - g\|$ è inferiormente semicontinua rispetto alla topologia $\sigma(E^*, E)$. La conclusione poi segue dal teorema di Weierstrass perché l'insieme

$$\{\varphi \in V^\perp : \|f_0 - \varphi\| \leq \inf_{g \in V^\perp} \|f_0 - g\| + 1\}$$

risulta essere chiuso per $\sigma(E^*, E)$, essendo intersezione di chiusi, e limitato, dunque compatto per $\sigma(E^*, E)$, da cui l'esistenza del minimo per $g \mapsto \|f_0 - g\|$. Dobbiamo provare che, fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$S_\lambda = \{g \in E^* : \|f_0 - g\| \leq \lambda\}$$

è chiuso per $\sigma(E^*, E)$, cioè $E^* \setminus S_\lambda$ è aperto. Sia $g_0 \in E^* \setminus S_\lambda$, cioè tale che $\|f_0 - g_0\| > \lambda$. Allora esiste $x \in B_E$ tale che $|\langle f_0 - g_0, x \rangle| > \lambda$. L'insieme

$$W = \{g \in E^* : |\langle f_0 - g, x \rangle| > \lambda\}$$

è un aperto per la topologia $\sigma(E^*, E)$ contenente g_0 e contenuto in $E^* \setminus S_\lambda$, che risulta quindi aperto. Infatti, se $g \in W$, allora

$$\|f_0 - g\| \geq |\langle f_0 - g, x \rangle| > \lambda,$$

da cui $g \notin S_\lambda$.