Analisi Funzionale 1 - a.a. 2013/2014

Quarto appello

Esercizio 1

Sia X spazio di Banach con norma $\|\cdot\|_X$ e V un suo sottospazio vettoriale chiuso.

1. Si provi che
$$\big\|[x]\big\|_{X/V} = \inf_{z\in[x]} \|z\|_X = \inf_{z\in V} \|x-z\|_X\,, \qquad [x]\in X/V\,,$$
definisce una norma (che chiamiamo canonica) sullo spazio quoziente X/V.

2. Provare che $\|\cdot\|_{X/V}$ rende X/V uno spazio di Banach.

Siano ora E ed F spazi di Banach e $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Si assuma che $\operatorname{im} T$ sia un sottoinsieme chiuso di F.

3. Dimostrare che, detto $T^\star$ l'operatore aggiunto di T, si ha $\operatorname{im} T^\star \subseteq (\ker T)^\perp$, dove, se $M\subseteq E$, si pone
$$M^\perp \doteq \big\{\varphi\in E^\star : \langle\varphi, x\rangle = 0\ \forall\, x\in M\big\}\,.$$

4. Provare che se $\varphi\in(\ker T)^\perp$, la posizione
$$\Phi([x]) = \langle\varphi, x\rangle_{E^\star,E}\,, \quad [x]\in E/\ker T\,,$$
definisce un elemento di $(E/\ker T)^\star$, dove $E/\ker T$ è dotato della norma canonica di cui al punto 1.

5. Si provi che la posizione
$$\widetilde{T}([x]) = Tx\in\operatorname{im} T\,, \quad [x]\in E/\ker T\,,$$
definisce un operatore lineare e continuo da $E/\ker T$ in $\operatorname{im} T$ dotati delle rispettive norme canoniche.

6. Provare che $\operatorname{im} T^\star = (\ker T)^\perp$.

7. Provare che se $\operatorname{im} T$ non è chiuso, in generale $\operatorname{im} T^\star$ è un sottospazio proprio di $(\ker T)^\perp$.

Svolgimento

1. Se $\|[x]\|_{X/V}=0$, allora si trova $\{z_n\}_{n\geq 1}\subseteq V$ tale che $\|x-z_n\|_X\to 0$. Poiché V è chiuso, si deduce che $x\in V$ e quindi $[x]=[0]$. Sia ora $\lambda\in\mathbb{R}$. Si ha
$$\big\|\lambda[x]\big\|_{X/V} = \inf_{z\in[\lambda x]}\|z\|_X = \inf_{y\in[x]}\|\lambda y\|_X = |\lambda|\,\big\|[x]\big\|_{X/V}\,,$$
perché, se $z-\lambda x\in V$, allora, posto $y=z/\lambda$, si ha $y-x\in V$. Vediamo ora la disuguaglianza triangolare. Siano $x,y\in X$.
$$\begin{aligned}\big\|[x]+[y]\big\|_{X/V} = \big\|[x+y]\big\|_{X/V} &= \inf_{z\in[x+y]}\|z\|_X = \inf_{\substack{z_1\in[x]\\ z_2\in[y]}}\|z_1+z_2\|_X\\ &\leq \inf_{\substack{z_1\in[x]\\ z_2\in[y]}}\big(\|z_1\|_X+\|z_2\|_X\big) = \big\|[x]\big\|_{X/V} + \big\|[y]\big\|_{X/V}\,.\end{aligned}$$

2. Sia $\{[x_n]\}_{n\geq 1} \subseteq X/V$ una successione di Cauchy. Proviamo che ha una sottosuccessione convergente. Innanzitutto, si osserva facilmente che esiste una sottosuccessione $\{[x_{n_k}]\}_{k\geq 1} \subseteq X/V$ tale che
$$\left\|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\right\|_{X/V} < 1/2^k \,.$$
Per definizione, per ogni $k \geq 1$ troviamo $z_{n_k} \in [x_{n_k}]$ tale che
$$\|z_{n_{k+1}} - z_{n_k}\|_X < 1/2^k \,.$$
Allora la successione $\{z_{n_k}\}_{k\geq 1}$ risulta essere di Cauchy perché, se $j > k$, si ha
$$\|z_{n_j} - z_{n_k}\|_X \leq \sum_{\ell=k+1}^{j} \|z_{n_\ell} - z_{n_{\ell-1}}\|_X < \sum_{\ell=k+1}^{j} 1/2^{\ell-1} \,.$$
Poiché X è completo, $\{z_{n_k}\}_{k\geq 1}$ è convergente. Sia x_0 il suo limite. Si ha
$$\left\|[x_{n_k}] - [x_0]\right\|_{X/V} \leq \|z_{n_k} - x_0\|_X \,,$$
da cui si deduce che $[x_{n_k}] \to [x_0]$ in X/V.

3. Se $f \in F^\star$ e $x \in \ker T$, si ha
$$\langle T^\star f, x\rangle_{E^\star,E} = \langle f, Tx\rangle_{F^\star,F} = 0 \,,$$
essendo $Tx = 0$, e quindi $\operatorname{im} T^\star \subseteq (\ker T)^\perp$.

4. Osserviamo che per definizione di $(\ker T)^\perp$ si ha $\ker T \subseteq \ker \varphi$. Allora se $[x] = [y]$, $x-y \in \ker\varphi$ e quindi $\langle \varphi, x\rangle = \langle \varphi, y\rangle$, da cui la buona posizione di Φ. La linearità di Φ è banale, essendo φ lineare. Quanto alla continuità, essendo $\Phi([x]) = \langle \varphi, z\rangle$ per ogni $z \in [x]$, si ottiene
$$|\Phi([x])| \leq \|\varphi\|\|z\|_E \qquad \forall\, z \in [x] \,,$$
da cui $|\Phi([x])| \leq \|\varphi\| \left\|[x]\right\|_{E/\ker T}$.

5. L'operatore $\widetilde{T}$ è ben definito perché, se $x - y \in \ker T$, si ha $Tx = Ty$ e quindi
$$\widetilde{T}([x]) = Tx = Ty = \widetilde{T}([y]) \,.$$
Il fatto che $\widetilde{T}$ sia lineare si dimostra banalmente sfruttando la linearità di T. Proviamo che $\widetilde{T}$ è continuo. Si ha
$$\left\|\widetilde{T}([x])\right\|_{F/\operatorname{im} T} = \|T(x-z)\|_F \qquad \forall\, z \in \ker T \,.$$
Allora
$$\left\|\widetilde{T}([x])\right\|_{F/\operatorname{im} T} \leq \inf_{z\in\ker T} \|T(x-z)\|_F \leq \|T\| \inf_{z\in\ker T} \|x-z\|_E = \|T\| \left\|[x]\right\|_{E/\ker T} \,,$$
da cui la continuità di $\widetilde{T}$.

6. Fissata $\varphi \in (\ker T)^\perp$, dobbiamo trovare $f \in F^\star$ tale che $T^\star f = \varphi$. Preliminarmente, si osservi che per ogni $x \in E$ deve valere
$$\langle \varphi, x\rangle_{E^\star,E} = \langle T^\star f, x\rangle_{E^\star,E} = \langle f, Tx\rangle_{F^\star,F} = \langle (f\circ T), x\rangle_{E^\star,E} \,,$$

cioè deve essere $f \circ T = \varphi$. In generale T non è invertibile, e quindi non possiamo semplicemente definire f come $\varphi \circ T^{-1}$. Cerchiamo comunque di sfruttare l'idea utilizzando le mappe Φ e $\widetilde{T}$ introdotte in precedenza, ed osservando, in particolare, che $\widetilde{T}$ è biiettiva per costruzione. Grazie al punto 2, lo spazio quoziente $E/\ker T$ e $\operatorname{im} T$ con le norme canoniche sono completi, essendo $\ker T$ e $\operatorname{im} T$ sottospazi chiusi di E ed F, rispettivamente. Allora, per il teorema della mappa aperta, l'inversa $\widetilde{T}^{-1}$ di $\widetilde{T}$ risulta essere anch'essa continua. Sia ora $f \in F^\star$ definita da

$$\langle f, y\rangle = \Phi\big(\widetilde{T}^{-1}(y)\big)\,, \qquad y \in \operatorname{im} T\,,$$

poi estesa a tutto F con il teorema di Hahn-Banach. Per ogni $x \in E$ si ha

$$\langle T^\star f, x\rangle_{E^\star,E} = \langle f, Tx\rangle_{F^\star,F} = \Phi\big(\widetilde{T}^{-1}(Tx)\big) = \Phi([x]) = \langle \varphi, x\rangle_{E^\star,E}\,,$$

e quindi $T^\star f = \varphi$.

7. Sia T l'immersione di $L^\infty(0,1)$ in $L^1(0,1)$. Allora l'immagine non è chiusa perché $L^\infty(0,1)$ è denso in $L^1(0,1)$. D'altra parte $\ker T = \{0\}$ e quindi $(\ker T)^\perp = (L^\infty)^\star$. Ma per ovvi motivi $T^\star$ è l'immersione di $(L^1(0,1))^\star \cong L^\infty(0,1)$ in $(L^\infty(0,1))^\star$, e chiaramente $(L^1(0,1))^\star$ è un sotospazio proprio di $(L^\infty(0,1))^\star$, perché non tutti i funzionali lineari e continui su $L^\infty(0,1)$ sono rappresentabili come un'integrale contro una funzione di $L^\infty(0,1)$.

Esercizio 2

Sia E spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$.

1. Provare che $\|\cdot\|$ è debolmente sequenzialmente semicontinua inferiormente.

Sia ora $\varphi : [0,1] \to E$ funzione sequenzialmente debolmente continua, cioè tale che se $t_n \to t$ in $[0,1]$, allora $\varphi(t_n) \rightharpoonup \varphi(t)$. Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(t) = \|\varphi(t)\|$. Provare che

2. f ha minimo;

3. f è limitata.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Siccome $\|\cdot\|$ è sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole, f è sequenzialmente semicontinua inferiormente e quindi ammette minimo essendo $[0,1]$ (sequenzialmente) compatto.

3. Siano $S \geq 0$ e $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0,1]$ tali che

$$\lim_n f(t_n) = \sup_{t\in[0,1]} f(t) \doteq S\,.$$

A meno di sottosuccessioni $t_n \to t \in [0,1]$, cosicché $\varphi(t_n) \rightharpoonup \varphi(t)$. Allora esiste $C > 0$ tale che $\|\varphi(t_n)\| \leq C$ per ogni n, da cui $S \leq C$.

Esercizio 3

1. Si enuncino il teorema dell'alternativa di Fredholm ed il teorema di Hilbert-Schimdt.

2. Siano H spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{K}(H)$, $I \in \mathcal{L}(H)$ l'identità di H e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Provare che se
$$\inf \Big\{ |\lambda h - Th| : |h| = 1 \Big\} = 0\,,$$
allora λ è autovalore di T..

3. Siano H spazio di Hilbert separabile e $T \in \mathcal{K}(H)$ autoaggiunto. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ gli autovalori distinti non nulli di T. Sia $P_n \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$, la proiezione ortogonale sull'autospazio $\ker(\lambda_n I - T)$. Provare che
$$T = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n\,,$$
dove la serie converge a T in $\mathcal{L}(H)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Se $\lambda I - T$ fosse iniettivo, allora per Fredholm sarebbe anche suriettivo. La mappa aperta implica che $(\lambda I - T)^{-1}$ è continuo. Sia $h_n \in H$, $|h_n| = 1$, tale che
$$w_n = \lambda h_n - T h_n \to 0\,.$$
Allora
$$h_n = (\lambda I - T)^{-1} w_n \to 0\,,$$
assurdo perché $|h_n| = 1$.

3. Siano $\lambda_0 = 0$ e $\{e_j\}_{j \geq 0}$ base hilbertiana di autovettori di T con
$$e_0, \dots e_{j_0} \in \ker T\,,$$
$$e_j \in \ker(\lambda_n I - T)\,, \qquad 0 \leq j_{n-1} < j \leq j_n\,,\ n \geq 1\,.$$
Allora, se
$$u = \sum_j c_j e_j\,,$$
si ha
$$\Big\| Tu - \sum_{k=1}^{n} \lambda_n P_n u \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k \geq n+1} \lambda_k \sum_{j = j_{k-1}+1}^{j_k} c_j e_j \Big\|^2 \leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \sum_{j > j_n} |c_j|^2 \leq \sup_{k \geq n+1} |\lambda_k| \|u\|^2\,,$$
da cui la conclusione perché $\lambda_n \to 0$.