Analisi Funzionale 1 - a.a. 2014/2015

Primo appello

Esercizio 1

Siano H uno spazio di Hilbert e V un suo sottospazio vettoriale chiuso, proprio, non banale. Sia P_V la proiezione ortogonale di H su V.

1. Provare che $P_V \in \mathcal{L}(H)$.
2. Determinare lo spettro di P_V.
3. Sia dia una condizione necessaria e sufficiente su V affinché P_V sia un operatore compatto.

Svolgimento

1. La dimostrazione della linearità e della continuità di P_V discende direttamente dal fatto che $(u - P_V u, v) = 0$ per ogni $v \in V$, ed è omessa.
2. Essendo $\ker P_V = V^\perp$ e $P_V\big|_V = I_V$, si ha $0, 1 \in \sigma(P_V)$, essendo V un sottospazio non banale. Sia ora $\lambda \neq 0, 1$. Allora $P_V - \lambda I$ è biiettivo. Infatti, se $P_V u - \lambda u = 0$, allora $\lambda u = P_V u$ e quindi $u \in V$, da cui $P_V u = u$ e $(1 - \lambda)u = 0$, da cui $u = 0$ e l'iniettività di $P_V - \lambda I$. Fissato ora $v \in H$, cerchiamo $u \in H$ tale che $v = P_V u - \lambda u$. Deve essere
$$v + \lambda u = P_V u \in V\,.$$
e quindi
$$0 = P_{V^\perp}(v + \lambda u) = P_{V^\perp} v + \lambda P_{V^\perp} u \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_{V^\perp} u = -\frac{1}{\lambda} P_{V^\perp} v\,.$$
D'altra parte si ha
$$v = P_V v + P_{V^\perp} v = P_V u - \lambda(P_V u + P_{V^\perp} u) = (1 - \lambda) P_V u + P_{V^\perp} v$$
da cui
$$P_V u = \frac{1}{1 - \lambda} P_V v\,,$$
e quindi
$$(P_V - \lambda I)\left(\frac{1}{1 - \lambda} P_V v - \frac{1}{\lambda} P_{V^\perp} v\right) = v\,.$$
Se ne deduce che $\sigma(P_V) = \{0, 1\}$.
3. Se P_V fosse compatto, allora $I_V = P_V\big|_V$ lo sarebbe, e quindi $\dim V < +\infty$. Poichè $\operatorname{im} P_V = V$, tale condizione è anche sufficiente.

Esercizio 2

1. Si enuncino i teoremi di Banach-Alaoglu e di Baire.

Si considerino gli spazi $\ell^1(\mathbb{N})$ e $\ell^\infty(\mathbb{N})$ con le norme naturali, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ rispettivamente. Date
$$\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})\,, \qquad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in B_\infty \doteq \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty \leq 1\right\}\,,$$
si ponga
$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n - g_n|}{2^n}\,.$$

2. Si provi che d è una metrica in B_∞, e che B_∞ è compatta per la topologia definita da tale metrica.

3. Sia $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^1(\mathbb{N})$ una successione debolmente convergente a zero. Dato $\varepsilon > 0$ e posto $F_j = \big\{\mathbf{f} \in B_\infty : |\,\langle \mathbf{f}, \mathbf{x}_k\rangle\,| \le \varepsilon \;\forall\, k \ge j\big\}$, si provi che esistono $\delta > 0$, $j_0 \in \mathbb{N}$ e $\boldsymbol{\varphi} \in B_\infty$ tali che

$$\mathbf{f} \in B_\infty\,,\ d(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f} \in F_{j_0}\,.$$

Svolgimento

1. Omesso.

2. Omettiamo la verifica che d è una metrica, che discende direttamente dalle proprietà del valore assoluto e delle serie a termini positivi. Per dimostrare la compattezza di B_∞, consideriamo l'immersione

$$\iota : \big(B_\infty, \sigma(\ell^\infty, \ell^1)\big) \to (B_\infty, d)\,. \tag{1}$$

Poiché B_∞ è compatta per la topologia $\sigma(\ell^\infty, \ell^1$ grazie al teorema di Banach-Alaoglu, se proviamo che ι è continua, B_∞ risulta compatta anche per la topologia definita dalla metrica d. Siano $\mathbf{f}_0 = \{f_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in B_\infty$ ed $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare un intorno debole* V di $\mathbf{f}_0$ tale che, se $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B_\infty \cap V$, allora $d(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0) < \varepsilon$. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n\ge N+1} \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Sia $\{\mathbf{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell^1\mathbb{N}$ tale che $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$, e si ponga

$$V = \big\{\mathbf{f} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \big|\,\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \mathbf{e}_k\rangle\,\big| < \varepsilon/3\,,\ k = 1, \dots, N\big\}\,.$$

Allora, se $\mathbf{f} \in B_\infty \cap V$, si ha

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{|f_n - f_{0n}|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f_n - f_{0n}|}{2^n} \\ &\le \sum_{n=0}^{N} \frac{|\,\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \mathbf{e}_n\rangle\,|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} < 2\,\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

come si voleva.

3. Si noti che, poiché $\mathbf{x}_k \rightharpoonup \mathbf{0}$, allora $\cup_j F_j = B_\infty$. Se proviamo che tutti gli F_j sono chiusi per la topologia indotta dalla metrica d, allora il teorema di Baire ci permette di concludere perché esisterà qualche F_{j_0} con interno non vuoto. Per dimostrarlo è sufficiente provare che, fissato $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, l'insieme

$$F = \big\{\mathbf{f} \in B_\infty : |\,\langle \mathbf{f}, \mathbf{x}\rangle\,| \le \varepsilon\big\}$$

è chiuso, risultando così

$$F_j = \bigcap_{k\ge j} F_k$$

intersezione numerabile di chiusi. Per provare che F è chiuso si può procedere in due modi.

   (a) L'insieme F è compatto per $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ perché chiuso e limitato. Essendo la mappa ι in (1) continua, ne consegue che $F = \iota(F)$ è compatto, e quindi chiuso, per la topologia definita dalla metrica d.

(b) Sia $\{\mathbf{f}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione in F convergente ad $\mathbf{f}$ per la metrica d. Allora

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{x}\rangle| \leq \big|\langle \mathbf{f}-\mathbf{f}_n, \mathbf{x}\rangle\big| + |\langle \mathbf{f}_n, \mathbf{x}\rangle| \leq \big|\langle \mathbf{f}-\mathbf{f}_n, \mathbf{x}\rangle\big| + \varepsilon\,.$$

Se proviamo che

$$\lim_n \langle \mathbf{f}-\mathbf{f}_n, \mathbf{x}\rangle = 0\,,$$

allora possiamo concludere. Si ha

$$\langle \mathbf{f}-\mathbf{f}_n, \mathbf{x}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}(f_k - f_{n,k})x_k\,.$$

Poiché $(f_k - f_{n,k})x_k \to 0$ per $n\to\infty$, essendo $d(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}) \to 0$, ed essendo

$$\big|(f_k - f_{n,k})x_k\big| \leq 2|x_k|\,,$$

si conclude per convergenza dominata.

Esercizio 3

1. Si dimostri che se E è uno spazio di Banach riflessivo, allora B_E, palla unitaria chiusa di centro zero, è compatta per la topologia debole.

Siano ora $p, q \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, esponenti coniugati, $1/p + 1/q = 1$. Si consideri $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile dotato della misura di Lebesgue λ, e $\Omega\times\Omega$ dotato della misura prodotto $\lambda\times\lambda$. Fissata $\kappa \in L^q(\Omega\times\Omega)$, si definisca

$$(Tf)(x) = \int_\Omega \kappa(x,y)f(y)\,dy\,, \qquad f \in L^p(\Omega)\,.$$

2. Si provi che Tf è ben definita per q.o. $x\in\Omega$ e che $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$.
3. Si provi che $T \in \mathcal{K}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Si osservi che

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |\kappa(x,y)|^q\,dxdy < +\infty$$

da cui

$$\int_\Omega |\kappa(x,y)|^q\,dy < +\infty$$

per quasi ogni x, e quindi Tf è ben definita per quasi ogni x grazie alla disuguaglianza di Hölder. La linearità di T discende direttamente da quella dell'integrale. Inoltre

$$\|Tf\|_q^q = \int_\Omega \left|\int_\Omega \kappa(x,y)f(y)\,dy\right|^q dx \leq \int_\Omega \|\kappa(x,\cdot)\|_q^q \|f\|_p^q\,dx = \|\kappa\|_{L^q(\Omega\times\Omega)}^q \|f\|_p^q\,,$$

da cui $Tf \in L^q(\Omega)$ e la continuità di T.

3. Sia $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(\Omega)$ limitata. A meno di sottosuccessioni $f_n \rightharpoonup f$ e quindi

$$Tf_n(x) = \int_\Omega \kappa(x,y) f_n(y)\,dy \to \int_\Omega \kappa(x,y) f(y)\,dy = Tf(x)\,,$$

per quasi ogni x, essendo $\kappa(x,\cdot) \in L^q(\Omega)$ per quasi ogni x. Inoltre

$$\left| \int_\Omega \kappa(x,y) f_n(y)\,dy \right| \leq \|f_n\|_p \|\kappa(x,\cdot)\|_q \leq C\|\kappa(x,\cdot)\|_q \in L^q(\Omega).$$

Usando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ottiene che $Tf_n \to Tf$ in $L^q(\Omega)$.