Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione del compito del 26/1/2018

Esercizio 1

1. Si dimostri che la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ è regolare.
2. Si trovino $E, F \subseteq \mathbb{R}$ misurabili di misura positiva tali che

   $$m(E) > \sup\big\{m(U) : U \subseteq E\,,\ U \text{ è aperto}\big\}\,, \quad m(F) < \inf\big\{m(K) : K \supseteq E\,,\ K \text{ è compatto}\big\}\,,$$

   dove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Sia $E \subset [0,1]$ compatto con interno vuoto tale che $m(E) > 1/2$[1] e $F = [0,1] \setminus E$. Avendo interno vuoto, l'unico aperto contenuto in K è l'insieme vuoto. Poiché F è aperto (relativo) denso in $[0,1]$, ha misura positiva minore di $1/2$, e un compatto K che lo contiene deve necessariamente contenere $[0,1]$, e quindi $m(K) \geq 1$.

Esercizio 2

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ e $\{g_n\}_{n\geq 1}$ successioni di funzioni misurabili da X in $\mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$.

1. Provare che, se $f_n, g_n \to 0$ in misura, allora $f_n + g_n \to 0$ in misura.
2. Provare che, se $\|f_n\|_p \to 0$, allora $f_n \to 0$ in misura.
3. Supponendo $\mu(X) < \infty$, provare che, se $\mu(X) < \infty$ e $\|f_n\|_\infty \leq C$ per qualche $C > 0$ e per ogni $n \geq 1$, allora $\|f_n\|_p \to 0$ se e solo se $f_n \to 0$ in misura.
4. Provare che $f_n \to 0$ in misura se e solo se $\arctan f_n \to 0$ in misura.
5. Supponendo $\mu(X) < \infty$, provare che $f_n \to 0$ in misura se e solo se $\arctan f_n \to 0$ in $L^1(\mu)$.
6. Si consideri $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. Provare che la successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ definita da

   $$\varphi_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x) + n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\sqrt{|x|}}\right) e^{-nx^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

   converge a zero in misura.

[1] Si ricorda che un tale insieme è possibile costruirlo in questo modo. Fissata la successione $\{q_n\}_{n\geq 1}$ dei razionali contenuti in $[0,1]$, sia I_n un intervallo centrato in q_n ed ampiezza $1/2^{n+1}$. Allora l'insieme

$$E = [0,1] \setminus \bigcup_{n\geq 1} I_n$$

soddisfa $m(E) > 1/2$, ed ha interno vuoto perché il suo complementare in $[0,1]$ è un aperto denso.

Svolgimento

1. Fissato $\varepsilon > 0$, si ha

$$\left\{x \in X : |f_n(x) + g_n(x)| > \varepsilon\right\} \subseteq \left\{x \in X : |f_n(x)| + |g_n(x)| > \varepsilon\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon/2\right\} \cup \left\{x \in X : |g_n(x)| > \varepsilon/2\right\},$$

e si conclude.

2. Grazie alla disuguaglianza di Chebyshev si ha

$$\mu\Big(\left\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\right\}\Big) \leq \frac{\|f_n\|_p^p}{\varepsilon^p},$$

e si conclude.

3. Grazie al punto precedente, basta dimostrare la sufficienza. Fissato $\varepsilon > 0$ e posto

$$E_{n,\varepsilon} = \left\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\right\},$$

si ha

$$\int_X |f_n|^p \, d\mu = \int_{E^c_{n,\varepsilon}} |f_n|^p \, d\mu + \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \mu(X) + C^p \mu(E_{n,\varepsilon}),$$

e quindi

$$\limsup_n \|f_n\|_p \leq \varepsilon \mu(X)^{1/p},$$

la cui la conclusione per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

4. Fissato $\varepsilon > 0$, grazie alla monotonia e alla simmetria di arctan si ha

$$\left\{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\right\} = \left\{x \in X : |\arctan f_n(x)| > \arctan \varepsilon\right\},$$

e si conclude.

5. La necessità deriva dal punto precedente e dal punto 3 utilizzando il punto 4. Quanto alla sufficienza, deriva dal punto 2 e dal punto 4.

6. Poniamo

$$g_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}, \qquad f_n(x) = n \operatorname{sen}\Big(\frac{1}{n\sqrt{|x|}}\Big) e^{-nx^2}.$$

Allora $g_n \to 0$ in misura e $f_n \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$. Infatti, fissato $\varepsilon < n$,

$$m\Big(\left\{x \in \mathbb{R} : |g_n(x)| > \varepsilon\right\}\Big) = 1/n.$$

Inoltre, $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$|f_n(x)| \leq n \frac{1}{n\sqrt{|x|}} e^{-nx^2} \leq \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} \in L^1(\mathbb{R})^2,$$

e si conclude per convergenza dominata. Allora $f_n \to 0$ in misura, e quindi $\varphi_n = g_n + f_n \to 0$ in misura.

---

[2]Infatti, si ha

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} \sim \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{per} \quad x \to 0, \qquad \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{definitivamente per} \quad x \to +\infty.$$

Si conclude osservando che $1/\sqrt{|x|} \in L^1(-1,1)$ e che $1/x^2 \in L^1(\mathbb{R} \setminus [-1,1])$.

Esercizio 3

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione continua a destra definita da

$$F(x) = e^x \chi_{]-\infty,0[}(x) + xe^{1-x}\chi_{]0,+\infty[}(x)\,.$$

Sia $\mu = \mu_F$ la misura con segno di Lebesgue-Stieltjes associata ad F.

1. Calcolare la decomposizione di Hahn di μ, la sua decomposizione di Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e le sue parti assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

2. Trovare due funzioni F^+ e F^- tali che $\mu^+ = \mu_{F^+}$ e $\mu^- = \mu_{F^-}$.

3. Dato $a > 0$, sia
$$T(a) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le y \le a\right\}.$$
Calcolare $m \otimes \mu^+(T(a))$ e $m \otimes \mu^-(T(a))$.

Svolgimento

1. Un abbozzo del grafico di F si trova in figura 1. F è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $[0, 1]$, mentre è decrescente in $[1, +\infty[$. Inoltre, è di classe $\mathcal{C}^1$ in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$ ed ha un punto di

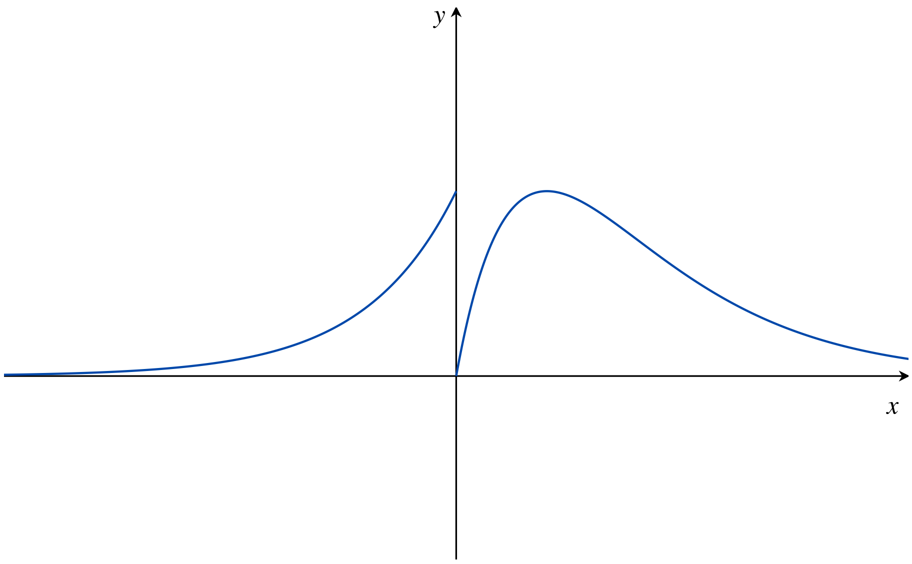

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3 (gli assi hanno scale diverse)

salto in $x = 0$. Allora

$$d\mu = \left(e^x\chi_{]-\infty,0[} + e^{1-x}(1-x)\chi_{]0,+\infty[}\right) dm - \delta_0\,,$$

che rappresenta anche la sua decomposizione nelle parti assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue. per la decomposizione di Hahn, visti gli intervalli di crescenza e decrescenza di F, si ha

$$P =]-\infty, 0[\cup]0, 1]\,, \qquad N = \left\{0\right\} \cup]1, +\infty[\,,$$

e quindi

$$d\mu^+ = \left(e^x\chi_{]-\infty,0[} + e^{1-x}(1-x)\chi_{]0,1]}\right) dm\,, \qquad d\mu^- = -e^{1-x}(1-x)\chi_{]1,+\infty[}\, dm + \delta_0\,.$$

2. Essendo μ^+ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, F^+ deve essere continua ed avere derivata F'_+ tale che

$$DF^+(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x < 0\,, \\ e^{1-x}(1-x) & \text{se} \quad 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{se} \quad x > 1\,. \end{cases}$$

Allora

$$F^+(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 1 + xe^{1-x} & \text{se} \quad 0 \le x < 1\,, \\ 2 & \text{se} \quad x \ge 1\,. \end{cases}$$

In modo analogo, F^- deve avere un punto di salto in $x = 0$ ed essere continua altrove, mentre la sua derivata deve soddisfare

$$DF^-(x) = \begin{cases} -e^{1-x}(1-x) & \text{se} \quad x \ge 1\,, \\ 0 & \text{se} \quad x < 1,\, x \ne 0\,. \end{cases}$$

Allora

$$F^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 1 & \text{se} \quad 0 \le x < 1\,, \\ 2 - xe^{1-x} & \text{se} \quad x \ge 1\,. \end{cases}$$

3. Detta

$$T_x = \big\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T(a)\big\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad x \le 0 \text{ o } x > a\,, \\ [x,a] & \text{se} \quad 0 < x \le a\,, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} m \otimes \mu^+(T(a)) &= \int_{\mathbb{R}} \mu^+(T_x)\,dx = \int_0^a \mu^+([x,a])\,dx\,, \\ m \otimes \mu^-(T(a)) &= \int_{\mathbb{R}} \mu^-(T_x)\,dx = \int_0^a \mu^-([x,a])\,dx\,. \end{aligned}$$

Fissato $x \in]0,a]$, si ha

$$\mu^+([x,a]) = F^+(a) - F^-(x-) = \begin{cases} ae^{1-a} - xe^{1-x} & \text{se} \quad a \le 1\,, \\ 1 - xe^{1-x} & \text{se} \quad x \le 1 < a\,, \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x \le a\,. \end{cases}$$

Allora si ottiene

- se $a \le 1$,

$$\begin{aligned} m \otimes \mu^+(T(a)) &= \int_0^a (ae^{1-a} - xe^{1-x})\,dx = a^2e^{1-a} + (x+1)e^{1-x}\Big|_0^a \\ &= (a^2 + a + 1)e^{1-a} - e\,; \end{aligned}$$

- se $a > 1$,

$$\begin{aligned} m \otimes \mu^+(T(a)) &= \int_0^1 (1 - xe^{1-x})\,dx = 1 + (x+1)e^{1-x}\Big|_0^1 \\ &= 3 - e\,; \end{aligned}$$

Veniamo a $\mu^-([x,a])$, $x \in]0,a]$. Si ha

$$\mu^-([x,a]) = F^-(a) - F^-(x-) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \leq 1\,, \\ -ae^{1-a} + 1 & \text{se} \quad x \leq 1 < a\,, \\ -ae^{1-a} + xe^{1-x} & \text{se} \quad 1 < x \leq a\,. \end{cases}$$

Allora si ottiene $m \otimes \mu^-(T(a)) = 0$ se $a \leq 1$, mentre, se $a > 1$, si ha

$$\begin{aligned} m \otimes \mu^-(T) &= \int_0^1 (1 - ae^{1-a})\,dx + \int_1^a \left(xe^{1-x} - ae^{1-a}\right) dx \\ &= 1 - a^2e^{1-a} - (x+1)e^{1-x}\Big|_1^a = 3 - (a^2 + a + 1)e^{1-a}\,. \end{aligned}$$