Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione del compito del 16/2/2018

Esercizio 1

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ una successione di insiemi misurabili tale che $\sum_{n\geq 1} \mu(E_n) < \infty$.

1. Si dimostri che per q.o. $x \in X$ si ha
$$\left|\left\{n \geq 1 : x \in E_n\right\}\right| < \infty\,,$$
dove $|A|$ indica la cardinalità dell'insieme A.

   Sugg.: si considerino gli insiemi $F_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$.

2. Fornendo un controesempio, si dimostri che, in generale, supponendo solo che $\mu(E_n) \to 0$, l'asserto al punto precedente è falso.

Svolgimento

1. Posto
$$F_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k\,,$$
si ha
$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_k) \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty\,.$$
Si osservi che $F_{n+1} \subseteq F_n$. Posto
$$N = \bigcap_{n\geq 1} F_n\,, \qquad E = \bigcup_{n\geq 1} E_n\,,$$
si ha $\mu(N) = 0$. Se $x \notin N$, delle due l'una:
   (a) $x \notin E$, e quindi $x \notin E_n$ per ogni n;
   (b) $x \in E$, ma allora, essendo
$$N^c = \bigcup_{n\geq 1} F_n^c\,, \qquad F_n^c = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} E_k^c\,,$$
esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x \in F_{\bar{n}}$ e $x \notin F_{\bar{n}+1}$, e quindi
$$x \in \bigcup_{k=1}^{\bar{n}} E_k \quad \text{ma} \quad x \notin \bigcup_{k=1}^{\bar{n}+1} E_k\,,$$
da cui
$$\left|\left\{n \geq 1 : x \in E_n\right\}\right| \leq \bar{n}\,.$$

2. Si prenda
$$E_1 = [0, 1/2]\,, \qquad E_2 = [1/2, 1]\,, \qquad E_3 = [0, 1/4]\,,$$
$$E_4 = [1/4, 1/2]\,, \qquad E_5 = [1/2, 3/4]\,, \qquad E_6 = [3/4, 1]\,,$$
e poi si riparte con intervalli di ampiezza $1/8$. Qualunque x si fissi appartenente all'intervallo $[0, 1]$, si ha che $x \in E_n$ per infiniti n.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il Lemma di Fatou.

2. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ successione di funzioni misurabili da X in $\mathbb{R}$ convergenti q.o. ad una funzione misurabile f. Si supponga che esistano $G, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ integrabili e non negative tali che
$$|f_n(x)| \leq G(x) + g_n(x) \quad \text{per q.o. } x \in X\,,\ \forall n \geq 1\,,$$
e per cui vale $\lim_n \int_X g_n\, d\mu = 0$. Provare che $f \in L^1(\mu)$ e che valgono
$$\lim_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,, \qquad \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0\,.$$

3. Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della misura di Lebesgue, e sia
$$f_n(x) = e^{-|x|}\sqrt{\frac{|x| + n}{n}} - n\chi_{[n, n+1/n^2]}(x)\,, \qquad n \geq 1\,.$$
Calcolare il $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Innanzitutto, per il Lemma di Fatou, si ha
$$\int_X |f|\, d\mu = \int_X \lim_n |f_n(x)|\, d\mu \leq \liminf_n \int_X |f_n(x)|\, d\mu \leq$$
$$\leq \liminf_n \int_X (G + g_n)\, d\mu = \int_X G\, d\mu < \infty\,,$$
e quindi $f \in L^1(\mu)$. Successivamente, si osservi che
$$f_n(x) + G(x) + g_n(x) \geq 0\,, \quad G(x) + g_n(x) - f_n(x) \geq 0 \qquad \text{per q.o. } x \in X\,.$$
Allora, grazie ancora al Lemma di Fatou, si ha
$$\int_X \liminf_n (f_n + G + g_n)\, d\mu \leq \liminf \int_X (f_n + G + g_n)\, d\mu\,, \tag{1}$$
$$\int_X \liminf_n (G + g_n - f_n)\, d\mu \leq \liminf \int_X (G + g_n - f_n)\, d\mu\,. \tag{2}$$
Poiché
$$\liminf_n \big(f_n(x) + G(x) + g_n(x)\big) = f(x) + G(x) + \liminf_n g_n(x) \quad \text{per q.o. } x \in X\,,$$
e
$$\lim_n \int_X g_n\, d\mu = 0\,,$$
da (1) si ottiene
$$\int_X f\, d\mu + \int_X \liminf_n g_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n\, d\mu$$
ed essendo
$$\liminf_n \big(G(x) + g_n(x) - f_n(x)\big) = G(x) + \liminf_n g_n(x) - f(x) \quad \text{per q.o. } x \in X\,,$$

da (2) si ottiene
$$\int_X \liminf_n g_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \leq -\limsup_n \int_X f_n \, d\mu \, .$$
Allora vale
$$\limsup_n \int_X f_n \, d\mu + \int_X \liminf_n g_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu - \int_X \liminf_n g_n \, d\mu \, ,$$
da cui la conclusione, essendo
$$0 \leq \int_X \liminf_n g_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X g_n \, d\mu = 0 \, .$$

3. Considerate le funzioni non negative
$$G(x) = e^{-|x|}\sqrt{|x|+1} \, , \qquad g_n(x) = n\chi_{[n,n+1/n^2]}(x) \, ,$$
si ha $|f_n(x)| \leq G(x) + g_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $G \in L^1(\mathbb{R})$ e
$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty \, .$$
Inoltre, $f_n(x) \to e^{-|x|}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Applicando il risultato di cui al punto precedente si ottiene
$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \, dx = 2 \, .$$

Esercizio 3

Sia
$$F(x) = e^x \, \chi_{]-\infty,0[}(x) + \sqrt{2x - x^2} \, \chi_{[0,2[}(x) \, .$$

1. Calcolare $T_F(x)$ e la decomposizione di Hahn della misura con segno di Lebesgue-Stieltjes μ associata ad F.
2. Descrivere la decomposizione di Jordan μ^+, μ^- di μ, e la decomposizione di Lebesgue-Radon-Nicodym di $\mu^\pm$ rispetto alla misura di Lebesgue.
3. Siano $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ e $f(x) = \max\{x+1, 0\}$. Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \, d|\mu|$.
4. Provare che $f \in L^\infty(|\mu|)$ e calcolare la sua norma $\|f\|_\infty$ in questo spazio.

Svolgimento

1. Un abbozzo del grafico di F si trova in figura 1. F è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0,1]$, mentre è decrescente in $[1, +\infty[$. Inoltre, è di classe $\mathcal{C}^1$ in $]-\infty,0[$, in $]0,2[$ e in $]2,+\infty[$ ed ha un punto di salto in $x = 0$. Allora
$$T_F(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x < 0 \, , \\ 2 & \text{se} \quad x = 0 \, , \\ 2 + \sqrt{2x - x^2} & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \, , \\ 4 - \sqrt{2x - x^2} & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \, , \\ 4 & \text{se} \quad x > 2 \, . \end{cases}$$
$$P =]-\infty, 0[\cup]0, 1] \, , \qquad N = \{0\} \cup]1, +\infty[\, ,$$
ed inoltre
$$d\mu = \left(e^x \chi_{]-\infty,0[} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \chi_{]0,2[} \right) dm - \delta_0 \, .$$

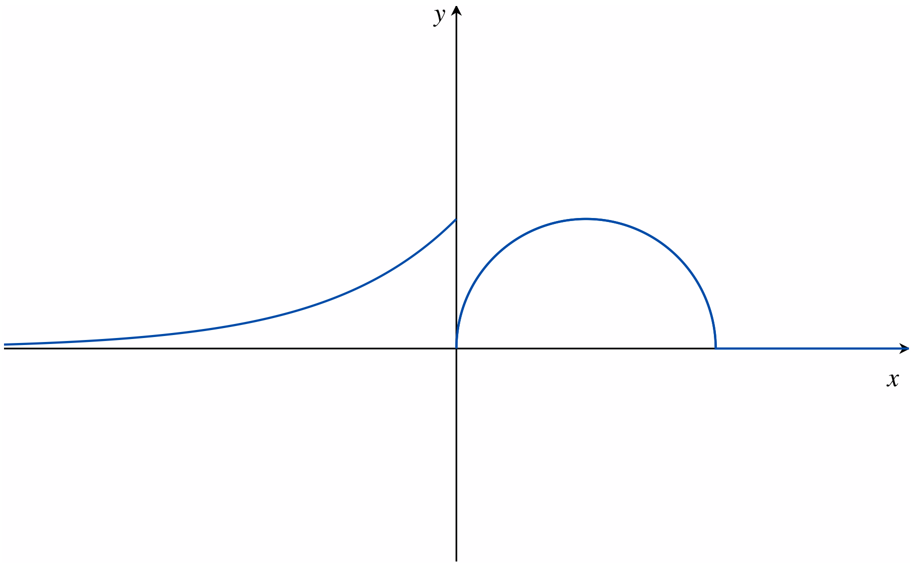

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

2. Per la decomposizione di Hahn, visti gli intervalli di crescenza e decrescenza di F, si ha e quindi

$$d\mu^+ = \left(e^x \chi_{]-\infty,0[} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \chi_{]0,1]} \right) dm\,, \qquad d\mu^- = -\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \chi_{]1,2]}\, dm + \delta_0\,, \tag{3}$$

che rappresentano anche le decomposizioni di Lebesgue-Radon-Nicodym rispetto alla misura di Lebesgue.

3. Ricordiamo che vale

$$\int_X f\, d|\mu| = \int_X f\, d\mu^+ + \int_X f\, d\mu^-\,.$$

Alla luce di (3) si ha

$$\begin{aligned}
\int_X f\, d\mu^+ &= \int_{]-\infty,0[} e^x f(x)\, dx + \int_{]0,1]} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} f(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^0 e^x (x+1)\, dx + \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} (x+1)\, dx \\
&= xe^x \Big|_{-1}^0 (x+1)\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\, dx \\
&= e^{-1} + 2 - \frac{\pi}{4}\,, \\
\int_X f\, d\mu^- &= -\int_{]1,2]} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} f(x)\, dx + f(0) = -\int_1^2 \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} (x+1)\, dx + 1 \\
&= -(x+1)\sqrt{2x-x^2}\Big|_1^2 + \int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\, dx + 1 \\
&= 3 + \frac{\pi}{4}\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_X f\, d|\mu| = 5 + e^{-1}\,.$$

4. Ricordiamo che

$$\|f\|_\infty = \inf\Big\{a \geq 0 : |\mu|\Big(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > a\}\Big) = 0\Big\}\,.$$

Osserviamo che $|\mu|(]2, +\infty[) = 0$ e che $|f(x)| \leq 3$ per ogni $x \leq 2$, cosicché $f \in L^\infty(|\mu|)$ e $\|f\|_\infty \leq 3$. Poiché, fissato $0 < \varepsilon < 1$,

$$\Big\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 3 - \varepsilon\Big\} =]2 - \varepsilon, +\infty[\,,$$

e quindi

$$|\mu|\Big(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 3 - \varepsilon\}\Big) = |\mu|\big(]2 - \varepsilon, +\infty[\big) = F(2 - \varepsilon) > 0\,,$$

si ottiene che $\|f\|_\infty = 3$.