Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione del compito del 2/7/2018

Esercizio 1

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura e $\mathcal{F}$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}$ contenente gli insiemi misurabili di misura finita. È noto che la posizione $d(E,F) = \mu(E \triangle F) = \|\chi_E - \chi_F\|_1$ definisce una pseudometrica in $\mathcal{F}$. Data $f : X \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $f\chi_E \in L^1(\mu)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, si definisca $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ come $\nu_f(E) = \displaystyle\int_E f\, d\mu$.

1. Provare che ν_f è numerabilmente additiva in $\mathcal{F}$ e che per ogni $E, F \in \mathcal{F}$ vale

$$\big|\nu_f(E) - \nu_f(F)\big| = \big|\nu_f(E \setminus F) - \nu_f(F \setminus E)\big| \leq \int_{E \triangle F} |f|\, d\mu\,.$$

Sia data $f \in L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$.

2. Provare che ν_f può essere definita.
3. Provare che esiste $C > 0$ tale che $|\nu_f(E)| \leq C\mu(E)^{1/q} \quad \forall E \in \mathcal{F}$, dove q è l'esponente coniugato di p.
4. Dedurre che ν_f è hölderiana come funzione da $\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento

1. Sia $\{E_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ tale che

$$E \doteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}\,, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j\,.$$

Poiché $f\chi_E \in L^1(\mu)$ ed essendo

$$|f\chi_E| = \sum_{k=1}^{\infty} |f\chi_{E_k}|\,,$$

grazie al teorema di convergenza monotona si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f\chi_{E_k}\|_{L^1(\mu)} = \|f\chi_E\|_{L^1(\mu)} < +\infty\,.$$

Utilizzando il teorema di convergenza dominata si ottiene

$$\nu_f(E) = \int_E f\, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}\, d\mu \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_k}\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_f(E_k)\,,$$

che è la numerabile additività. Fissati ora $E, F \in \mathcal{F}$, si ha

$$\begin{aligned}
\big|\nu_f(E) - \nu_f(F)\big| &= \big|\nu_f(E \setminus F) + \nu_f(E \cap F) - \nu_f(F \cap E) - \nu_f(F \setminus E)\big| \\
&= \left|\int_{E\setminus F} f\, d\mu - \int_{F\setminus E} f\, d\mu\right| \leq \left|\int_{E\setminus F} f\, d\mu\right| + \left|\int_{F\setminus E} f\, d\mu\right| \\
&\leq \int_{E\setminus F} |f|\, d\mu + \int_{F\setminus E} |f|\, d\mu = \int_{E\triangle F} |f|\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

2. Se $E \in \mathcal{F}$, allora $\mu(E) < +\infty$, e quindi $\chi_E \in L^q(\mu)$, con q esponente coniugato di p. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si conclude che $f\chi_E \in L^1(\mu)$, e quindi ν_f è be definita.

3. Sempre utilizzando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$|\nu_f(E)| = \left| \int_X f\chi_e \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|\chi_E\|_q = \|f\|_p \, \mu(E)^{1/q} .$$

4. Utilizzando quanto dimostrato ai punti 1 e 3, si ottiene

$$\big|\nu_f(E) - \nu_f(F)\big| \leq \int_{E\triangle F} |f| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \mu(E\triangle F)^{1/q} = \|f\|_p \, d(E,F)^{1/q} ,$$

da cui la conclusione

Esercizio 2

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura.

1. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

   (a) Esiste una successione $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $\mu(E_n) > 0$ per ogni n e $\mu(E_n) \to 0$ per $n \to \infty$.

   (b) Esiste una successione $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $0 < \mu(A_k) \leq 1/2^k$ per ogni k.

   (c) Esiste una funzione $f \in L^1(\mu) \setminus L^\infty(\mu)$.

   (d) Esiste una successione di insiemi a due a due disgiunti $\{B_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $0 < \mu(B_k) \leq 1/2^k$ per ogni k.

Sia ora $\{B_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ come al punto precedente e si ponga $b_k = \mu(B_k)$. Fissato $\alpha > 0$, sia

$$g_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-\alpha} \chi_{B_k} .$$

2. Si provi che $g_\alpha : X \to \mathbb{R}$ è misurabile.

3. Fissati $1 \leq p < q < \infty$, si provi che, se $1/q < \alpha < 1/p$, allora $g_\alpha \in L^p(\mu) \setminus L^q(\mu)$.

4. Sia dia un esempio di una misura μ su $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ tale che $L^p(\mu) = L^q(\mu)$ per ogni $1 \leq p, q \leq \infty$.

Svolgimento

1. (a) $\Longrightarrow$ (b). Banale: basta prendere una sottosuccessione $\{E_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tale che $\mu(E_{n_k}) \leq 1/2^k$.
   (b) $\Longrightarrow$ (c). È sufficiente definire

   $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\chi_{A_k}(x) .$$

   Infatti, banalmente $\|f\|_\infty = +\infty$, essendo $f(x) \geq k$ per ogni $x \in A_k$, ed inoltre

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \|k\chi_{A_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < +\infty ,$$

   da cui la convergenza della serie in $L^1(\mu)$ e l'integrabilità di f rispetto a μ.

(c) $\implies$ (d). Sia
$$E_n = \left\{ x \in X : \frac{1}{2^n}\|f\|_1 \le |f(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}\|f\|_1 \right\}.$$
Per definizione $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e, grazie alla disuguaglianza di Chebyshev, $\mu(E_n) \le 1/2^n$. In generale, $\mu(E_n)$ non è strettamente positiva per ogni n, ma certamente esiste una sottosuccessione $\{E_{n_k}\}_{k\ge 1}$ tale che $\mu(E_{n_k}) > 0$. Posto $B_k = E_{n_k}$, si conclude.

(d) $\implies$ (a). Banale.

2. Per ogni n,
$$g_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^{n} b_k^{-\alpha} \chi_{B_k}$$
è misurabile perché funzione semplice. Inoltre $g_{\alpha,n} \uparrow g_\alpha$ puntualmente, e quindi g_α è misurabile.

3. Essendo gli insiemi B_k a due a due disgiunti, fissato $1 \le r < \infty$, grazie al teorema di Beppo-Levi si ha
$$\|g_\alpha\|_r^r = \int_X \left| \sum_{k=1}^{n} b_k^{-\alpha} \chi_{B_k}(x) \right|^r d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-r\alpha} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-r\alpha+1}.$$
Se $r = p$, essendo $1 - p\alpha > 0$, si ottiene
$$\|g_\alpha\|_r^r = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{1-p\alpha} \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{2^{1-p\alpha}} \right)^k < \infty,$$
da cui $g_\alpha \in L^p(\mu)$. Se $r = q$, essendo $1 - q\alpha < 0$, si ottiene
$$\|g_\alpha\|_r^r = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{1-q\alpha} = \infty,$$
perché $b_k^{1-q\alpha} \to +\infty$ per $k \to \infty$, e quindi $g_\alpha \notin L^q(\mu)$.

4. È sufficiente prendere $\mu = \delta_0$, delta di Dirac centrata in 0. Allora
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, d\delta_0(x) = |f(0)|^p, \qquad \|f\|_{L^\infty(\delta_0)} = |f(0)|,$$
da cui la conclusione.

Esercizio 3

Sia μ una misura positiva di Borel su $\mathbb{R}$ tale che $\mu(\mathbb{R}^{<0}) = 0$ e $\mu(\mathbb{R}) = 1$, e sia $F(x) = \mu(]-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Si provi che F è continua a destra e che vale $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

2. Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y < x\}$. Calcolare $\mu \otimes m(T)$ e dedurre che
$$\int_{[0,+\infty[} x \, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big) \, dx.$$

3. Dimostrare che la formula $\varphi(x) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \cos(xt) \, d\mu(t)$ definisce una funzione continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Supponendo che $1 - F(x) \le 1/x^2$ definitivamente per $x \to +\infty$, si dimostri che la funzione φ definita sopra è di classe $\mathcal{C}^1$.

Svolgimento

1. Fissato x e presa una successione $\{x_k\}_{k\geq 1}$, $x_k > x$, convergente ad x, al fine di calcolare
$$\lim_k F(x_k)\,,$$
non è restrittivo assumere $\{x_k\}_{k\geq 1}$ decrescente. Infatti, F è crescente e quindi ha limiti destro e sinistro in ogni punto. Essendo
$$]-\infty, x_{k+1}] \subseteq]-\infty, x_k] \quad \forall k\,, \qquad]-\infty, x] = \bigcap_{k\geq 1}]-\infty, x_k]\,,$$
per la continuità dall'alto di μ si ha
$$F(x) = \mu\big(]-\infty, x]\big) = \lim_k \mu\big(]-\infty, x_k]\big) = \lim_k F(x_k)\,,$$
e si conclude. Inoltre, presa una successione $\{y_k\}_{k\geq 1}$ crescente e con limite $+\infty$, si ha
$$]-\infty, y_{k+1}] \supseteq]-\infty, y_k] \quad \forall k\,, \qquad \mathbb{R} = \bigcup_{k\geq 1}]-\infty, y_k]\,,$$
e quindi, grazie alla continuità dal basso di μ ed al fatto che F ha limite a $+\infty$, si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_k F(y_k) = \lim_k \mu\big(]-\infty, y_k]\big) = \mu(\mathbb{R}) = 1\,.$$

2. Detti
$$T_x = \big\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in T\big\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad x < 0 \\ [0, x[& \text{se} \quad x \geq 0\,, \end{cases}$$
$$T^y = \big\{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in T\big\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad y < 0 \\ ]y, +\infty[& \text{se} \quad y \geq 0\,, \end{cases}$$
Si ha
$$\mu \otimes m(T) = \int_{\mathbb{R}} m(T_x)\, d\mu(x) = \int_{[0,+\infty[} m([0,x[)\, d\mu(x) = \int_{[0,+\infty[} x\, d\mu(x)\,,$$
$$\begin{aligned} \mu \otimes m(T) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(T^y)\, dy = \int_0^{+\infty} \mu(]y, +\infty)\, dy = \int_0^{+\infty} \big[\mu(R) - \mu\big(]-\infty, y]\big)\big]\, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \big[1 - F(y)\big]\, dy\,. \end{aligned}$$

3. Si noti che $x \mapsto \cos(xt)$ è continua per ogni t, ed inoltre $|\cos(xt)| \leq 1$ per ogni x, t. Poiché la funzione che vale costantemente 1 appartiene ad $L^1(\mu)$, si conclude con il teorema di continuità degli integrali dipendenti da parametro.

4. Si noti che $\partial_x \cos(xt) = -t\,\mathrm{sen}(xt)$ e che $|t\,\mathrm{sen}(xt)| \leq |t|$ per ogni x, t. Inoltre,
$$\int_{\mathbb{R}} |t|\, d\mu(t) = \int_{[0,+\infty[} t\, d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\, dt < +\infty\,,$$
grazie al fatto che $1 - F(t) \leq 1/t^2$ definitivamente per $t \to +\infty$, e quindi $|t| \in L^1(\mu)$. Allora, grazie al teorema di derivazione degli integrali dipendenti da parametro, φ è derivabile e vale
$$\varphi'(x) = -\int_{[0,+\infty[} t\,\mathrm{sen}(xt)\, d\mu(t)\,.$$
La continuità di φ' discende dal teorema di continuità degli integrali dipendenti da parametro, grazie ancora al fatto che $|t| \in L^1(\mu)$.