Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione del compito del 3/9/2018

Esercizio 1

Si consideri $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$, dove $\mathcal{L}^n$ è la σ-algebra degli insiemi Lebesgue misurabili e m è misura di Lebesgue.

1. Provare che per ogni $A \in \mathcal{L}^n$ vale

$$m(A) = \inf\{m(U) : U \text{ è aperto e } U \supseteq A\} = \sup\{m(K) : K \text{ è compatto e } K \subseteq A\}$$

   nel caso in cui A sia limitato.

2. Provare che, dato $A \in \mathcal{L}^n$ limitato, esistono due successioni di insiemi $\{K_j\}_{j\geq 1}$, $\{U_j\}_{j\geq 1}$ tali che

   (a) K_j è compatto e U_j è aperto per ogni $j \geq 1$;

   (b) vale $K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq A \subseteq U_{j+1} \subseteq U_j$ per ogni $j \geq 1$;

   (c) $m(U_j \setminus K_j) < 2^{-j}$ per ogni $j \geq 1$.

   Provare che in tal caso vale $m(A \setminus \cup_j K_j) = m(\cap_j U_j \setminus A) = 0$.

3. Sia ora $A \in \mathcal{L}^n$ illimitato, e si ponga $A_j = A \cap B_j(0)$. Siano $K_j \subseteq A_j \subseteq U_j$, K_j compatto e U_j, aperto tali che $m(U_j \setminus K_j) < 2^{-j}$.

   (a) Provare che è possibile scegliere la successione $\{K_j\}_{j\geq 1}$ in modo che $K_j \subseteq K_{j+1}$.

   (b) Provare che vale
$$m(A \setminus \cup_j K_j) = m(\cap_{\ell\geq 1} \cup_{j\geq \ell} U_j \setminus A) = 0\,.$$

4. Utilizzando il lemma di Uryshon $\mathcal{C}^\infty$, dedurre che, dato $A \in \mathcal{L}^n$, esiste una successione in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ che converge a χ_A quasi ovunque.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Definiamo le due successioni induttivamente. Grazie al punto 1, esistono K_1 compatto ed U_1 aperto tali che $K_1 \subseteq A \subseteq U_1$ e

$$m(A \setminus K_1)\,,\, m(U_1 \setminus A) < 1/4\,,$$

   cosicché
$$m(U_1 \setminus K_1) = m(U_1 \setminus A) + m(A \setminus K_1) < 1/2\,.$$

   Supponiamo ora fissati K_j e U_j. Esistono due insiemi compatti $C_1 \subseteq A \setminus K_j$ e $C_2 \subseteq U_j \setminus A$ tali che
$$m\big((A \setminus K_j) \setminus C_1\big)\,,\, m\big((U_j \setminus A) \setminus C_2\big) < \frac{1}{2 \cdot 2^{j+1}}\,.$$

   Siano
$$K_{j+1} = K_j \cup C_1\,, \qquad U_{j+1} = U_j \cap C_2^c\,.$$

   Allora, chiaramente K_{j+1} è compatto e U_{j+1} è aperto, $K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq A \subseteq U_{j+1} \subseteq U_j$, ed inoltre

$$\begin{aligned} m(U_{j+1} \setminus K_{j+1}) &= m(U_{j+1} \setminus A) + m(A \setminus K_{j+1}) = m\big(U_j \cap C_2^c \cap A^c\big) + m(A \cap K_j^c \cap C_1^c) \\ &= m\big((U_j \setminus A) \setminus C_2\big) + m\big((A \setminus K_j) \setminus C_1\big) < \frac{1}{2^{j+1}}\,. \end{aligned}$$

Resta da provare che vale $m\big(A \setminus \cup_j K_j\big) = m\big(\cap_j U_j \setminus A\big) = 0$. Si ha

$$m\big(A \setminus \cup_j K_j\big) = m\big(A \cap (\cap_j K_j^c)\big) \le m(A \cap K_\ell^c) \le m(U_\ell \setminus K_\ell) < \frac{1}{2^\ell} \qquad \forall \ell \ge 1\,,$$

e analogamente

$$m\big(\cap_j U_j \setminus A\big) \le m(U_\ell \setminus A) \le m(U_\ell \setminus K_\ell) < \frac{1}{2^\ell} \qquad \forall \ell \ge 1\,,$$

da cui la conclusione.

3. Procediamo con ordine.

   (a) Dato K_j, la costruzione di K_{j+1} è analoga a quella fatta al punto 2. Infatti, ricordando che $K_j \subseteq A_j \subseteq A_{j+1}$, è sufficiente trovare $C_1 \subseteq A_{j+1} \setminus K_j$ tale che

   $$m\big((A_{j+1} \setminus K_j) \setminus C_1\big) < \frac{1}{2^{j+1}}\,,$$

   e definire $K_{j+1} = K_j \cup C_1$.

   (b) Si ha

   $$A \setminus \cup_j K_j = (\cup_\ell A_\ell) \setminus (\cup_j K_j) = \bigcup_\ell (A_\ell \setminus \cup_j K_j)\,,$$

   e vale

   $$A_\ell \setminus \cup_j K_j \subseteq A_{\ell+1} \setminus \cup_j K_j\,.$$

   Allora

   $$m\big(A \setminus \cup_j K_j\big) = \lim_{\ell\to\infty} m\big(A_\ell \setminus \cup_j K_j\big) \le \liminf_{\ell\to\infty} m(A_\ell \setminus K_\ell) = 0\,.$$

   Consideriamo ora $\cap_\ell \cup_{j\ge\ell} U_j \setminus A$. Si osservi che

   $$\cup_{j\ge\ell+1} U_j \subseteq \cup_{j\ge\ell} U_j\,, \quad m\big(\cup_{j\ge1} U_j \setminus A\big) \le m\big(\cup_{j\ge1} U_j \setminus A_j\big) \le \sum_{\ell\ge1} \frac{1}{2^j} < +\infty$$

   e quindi, per la monotonia dall'alto di m, si trova

   $$\begin{aligned} m\big(\cap_\ell \cup_{j\ge\ell} U_j \setminus A\big) &= \lim_{\ell\to\infty} m\big(\cup_{j\ge\ell} U_j \setminus A\big) \le \liminf_{\ell\to\infty} m\big(\cup_{j\ge\ell} U_j \setminus A_j\big) \\ &\le \lim_{\ell\to\infty} \sum_{\ell\ge\ell} \frac{1}{2^j} = 0\,. \end{aligned}$$

4. Distinguiamo due casi.

   (a) Sia $A \in \mathcal{L}^n$ limitato. Consideriamo due successioni $\{K_j\}_{j\ge1}$ e $\{U_j\}_{j\ge1}$ come al punto 2. Sia $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi_j(x) \equiv 1$ in K_j e $\varphi_j(x) \equiv 0$ in U_j^c. Allora

   $$\varphi_j(x) \to \chi_A(x) \quad \forall x \notin \big(A \setminus \cup_j K_j\big) \cup \big(\cap_j U_j \setminus A\big)\,.$$

   Infatti

   $$\begin{aligned} x \notin \big(A \setminus \cup_j K_j\big) \cup \big(\cap_j U_j \setminus A\big) \quad &\iff \quad x \in \big(A \setminus \cup_j K_j\big)^c \cap \big(\cap_j U_j \setminus A\big)^c \quad \iff \\ &\iff \quad x \in \big(A^c \cup (\cup_j K_j)\big) \cap \big((\cup_j U_j^c) \cup A\big) \end{aligned}$$

   Se $x \in A$, allora $x \in \cup_j K_j$, e quindi $x \in K_j$ per ogni $j \ge \bar{j}$, per qualche $\bar{j} \ge 1$, grazie alla monotonia della successione $\{K_j\}_{j\ge1}$, da cui $\varphi_j(x) = 1$ per ogni $j \ge \bar{j}$. Se $x \in A^c$, allora $x \in \cup_j U_j^c$. Fissato $\bar{j}$ tale che $x \in U_{\bar{j}}^c$, poiché $U_{\bar{j}}^c \subseteq U_j^c$ per ogni $j \ge \bar{j}$, si ottiene che $\varphi_j(x) = 0$ per ogni $j \ge \bar{j}$, e si conclude.

(b) Sia ora $A \in \mathcal{L}^n$ illimitato, consideriamo due successioni $\{K_j\}_{j\geq 1}$ e $\{U_j\}_{j\geq 1}$ come al punto 3, e sia $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ come sopra, cioè tale che $\varphi_j(x) \equiv 1$ in K_j e $\varphi_j(x) \equiv 0$ in U_j^c. Allora

$$\varphi_j(x) \to \chi_A(x) \quad \forall x \notin \big(A \setminus \cup_j K_j\big) \cup \big(\cap_\ell \cup_{\ell\geq j} U_j \setminus A\big)\,.$$

Infatti

$$\begin{aligned} x \notin \big(A \setminus \cup_j K_j\big) \cup \big(\cap_\ell \cup_{\ell\geq j} U_j \setminus A\big) \quad &\iff \quad x \in \big(A \setminus \cup_j K_j\big)^c \cap \big(\cap_\ell \cup_{\ell\geq j} U_j \setminus A\big)^c \quad \iff \\ &\iff \quad x \in \big(A^c \cup (\cup_j K_j)\big) \cap \big((\cup_\ell \cap_{j\geq \ell} U_j^c) \cup A\big) \end{aligned}$$

Se $x \in A$, allora $x \in \cup_j K_j$, e quindi $x \in K_j$ per ogni $j \geq \bar{j}$, per qualche $\bar{j} \geq 1$, e come prima si ottiene $\varphi_j(x) = 1$ per ogni $j \geq \bar{j}$. Se $x \in A^c$, allora $x \in \cup_\ell \cap_{j\geq\ell} U_j^c$, e quindi troviamo $\bar{\ell}$ tale che $x \in \cap_{j\geq\bar{\ell}} U_j^c$, cioè $x \in U_j^c$ per ogni $j \geq \bar{\ell}$. Allora $\varphi_j(x) = 0$ per ogni $j \geq \bar{\ell}$, e si conclude.

Esercizio 2

Siano $\mathcal{B}$ l'insieme dei boreliani di $\mathbb{R}$ e μ la misura definita da

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_n(E)\,, \qquad E \in \mathcal{B}\,.$$

dove δ_n è la delta di Dirac centrata in n.

1. Stabilire se μ è singolare rispetto alla misura di Lebesgue.
2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $F(x) = \mu\big(]-\infty, x]\big)$.

Sia ora $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ la misura definita da

$$\nu(E) = \int_E (x-1)^{-3} \chi_{]-\infty,0]}(x)\,dx\,,$$

e si consideri la misura su $\mathcal{B}$ definita da $\lambda = \mu + \nu$.

3. Trovare le parti singolari e assolutamente continua di λ rispetto alla misura di Lebesgue.
4. Trovare una decomposizione di Hahn di λ, e le sue misure parte positiva λ^+ e parte negativa λ^-.
5. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $T(x) = |\lambda|\big(]-\infty, x]\big)$.
6. data la funzione $f(x) = x$, si stabilisca per quali $p \geq 1$ $f \in L^p(|\lambda|)$ e si calcoli, se possibile, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\,d\lambda(x)$.
7. Sia ora $f_k(x) = k\,\mathrm{sen}(x/k)$, $k \geq 1$. È vero o falso che la successione $\{f_k\}_{k\geq 1}$ converge ad $f(x) = x$ in $L^1(|\lambda|)$?

Svolgimento

1. Preso $E = \mathbb{N}$ ed $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, si ha $E \cup F = \mathbb{R}$, $E \cap F = \emptyset$, $m(E) = 0$ e $\mu(F) = 0$, cosicché $\mu \perp m$.
2. Detta $[x]$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, si ha $\mu(]-\infty, x]) = 0$ per ogni $x < 1$, perché $\delta_n(]-\infty, x]) = 0$ per ogni $x < 1$, $n \geq 1$. Se $x \geq 1$ si ha

$$\delta_n(]-\infty, x]) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \leq x\,, \\ 0 & \text{se} \quad n > x\,. \end{cases}$$

Allora si ottiene

$$\mu(]-\infty,x]) \sum_{n=1}^{[x]} 2^{-n} = 1 - 2^{-[x]} .$$

3. Banalmente, $\nu \ll m$ perché è definita come integrale di una funzione contro la misura di Lebesgue. Inoltre, ν è σ-finita perché la funzione

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}\chi_{]-\infty,0]}(x)$$

appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$. Tale è anche μ, essendo $\mu(\mathbb{R}) = 1$, e quindi anche λ è σ-finita. Allora, essendo $\mu \perp m$ e grazie all'unicità della decomposizione di λ in parti assolutamente continua e singolari rispetto alla misura di Lebesgue, ν è la sua parte assolutamente continua e μ la sua parte singolare rispetto a m.

4. Una volta osservato che

$$\frac{1}{(x-1)^3}\chi_{]-\infty,0]}(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

e che μ è misura positiva, si ottiene che $P =]0,+\infty[$ e $N =]-\infty,0]$ sono una decomposizione di Hahn di λ e si ha $\lambda^- = -\nu$ e $\lambda^+ = \mu$.

5. Grazie al punto precedente si ha

$$T(x) = -\nu(]-\infty,x]) + \mu(]-\infty,x]) .$$

$\mu(]-\infty,x])$ è già stata calcolata. Quando a $\nu(]-\infty,x])$, se $x \leq 0$ si ottiene

$$\nu(]-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(t-1)^3}\,dt = -\frac{1}{2(t-1)^2}\Big|_{-\infty}^{x} = -\frac{1}{2(x-1)^2} ,$$

e $\nu(]-\infty,x]) = -1/2$ se $x > 0$. Allora

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x-1)^2} & \text{se} \quad x \leq 0 , \\ 1/2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 , \\ 3/2 - 2^{[x]} & \text{se} \quad x \geq 1 . \end{cases}$$

6. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d|\lambda| = \int_{]-\infty,0]} \frac{|x|^p}{|x-1|^3}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} .$$

La serie converge per ogni p perché $n^p 2^{-n} \leq 1/n^{p+1}$ definitivamente per $n \to +\infty$. Quanto all'integrale, osserviamo che

$$\frac{|x|^p}{|x-1|^3} \sim \frac{1}{|x|^{3-p}} \quad \text{per } x \to -\infty ,$$

e quindi è finito se e solo se $3 - p > 1$. Se ne deduce che $f \in L^p(|\lambda|)$ se e solo se $p < 2$. In particolare, $f \in L^1(|\lambda|)$, e si ha

$$\int_{\mathbb{R}} x\,d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x-1)^3}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} .$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x-1)^3}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = -\frac{1}{x-1}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2(x-1)^2}\Big|_{-\infty}^{0} \\ &= -3/2 . \end{aligned}$$

Riguardo alla serie, ricordando che

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \forall x \in]-1,1[\,,$$

con $x = 1/2$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 2\,.$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} x \, d\lambda(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

7. Si osservi che $f_k(x) \to x$ per $k \to \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che vale $|f_k(x)| \leq |x|$, sempre per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(x) = x$ appartiene a $L^1(|\lambda|)$, il teorema di convergenza dominata permette di concludere che $f_k \to f$ in $L^1(|\lambda|)$.