Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione del compito del 17/9/2018

Esercizio 1

Siano X insieme non vuoto, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazio con misura e $\varphi : X \to Y$ funzione assegnata.

1. Provare che $\mathcal{M} \doteq \{\varphi^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ è una σ-algebra in X.
2. Si supponga φ suriettiva. Provare che, posto $\mu(F) = \nu(\varphi(F))$, μ è ben definita per ogni $F \in \mathcal{M}$ e che è una misura nello spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$.
3. Sia data $f : X \to \mathbb{R}$. Provare che, se φ è biiettiva, allora $f \in L^1(\mu)$ se e solo se $f \circ \varphi^{-1} \in L^1(\nu)$.

Svolgimento

1. Essendo $\emptyset = \varphi^{-1}(\emptyset)$, si ha $\emptyset \in \mathcal{M} \neq \emptyset$. Inoltre, se $F = \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, $E \in \mathcal{N}$, si ha $F^c = \varphi^{-1}(E^c) \in \mathcal{M}$ perché $E^c \in \mathcal{N}$. Siano ora $\{F_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, e sia $F_i = \varphi^{-1}(E_i)$, $E_i \in \mathcal{N}$. Allora
$$\bigcup_{i \geq 1} E_i \in \mathcal{N}\,,$$
e quindi $\cup_{i \geq 1} F_i \in \mathcal{M}$, essendo
$$\bigcup_{i \geq 1} F_i = \bigcup_{i \geq 1} \varphi^{-1}(E_i) = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i \geq 1} E_i\Big)\,.$$

2. μ è ben definita perché, se $F = \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{M}$, si ha $\varphi(F) = E \in \mathcal{N}$, grazie alla suriettività di φ.

   Ovviamente $\mu(\emptyset) = \nu(\varphi(\emptyset)) = \nu(\emptyset) = 0$. Siano ora $\{F_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$, con $F_i \cap F_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Allora $\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j) = \emptyset$ per $i \neq j$. Infatti, se $F_k = \varphi^{-1}(E_k)$, si ha $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ perché, se $y \in E_i \cap E_j$, grazie alla suriettività di φ esiste $x \in X$ tale che $y = \varphi(x)$. Ma allora $x \in \varphi^{-1}(E_i) \cap \varphi^{-1}(E_j) = F_i \cap F_j$, che non risulta più vuota. Allora, essendo ν una misura si ottiene
$$\mu\big(\bigcup_{i \geq 1} F_i\big) = \nu\big(\varphi\big(\bigcup_{i \geq 1} F_i\big) = \nu\big(\bigcup_{i \geq 1} \varphi(F_i)\big) = \sum_{i \geq 1} \nu\big(\varphi(F_i)\big) = \sum_{i \geq 1} \mu(F_i)\,.$$

3. Innanzitutto, $f : X \to \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ per ogni $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ si ha $f^{-1}(B) = \varphi^{-1}(E)$ per qualche $E \in \mathcal{N}$, se e solo se $(f \circ \varphi)^{-1}(B) = \varphi(f^{-1}(B)) \in \mathcal{N}$ per ogni $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, se e solo se $f \circ \varphi^{-1} : Y \to \mathbb{R}$ è misurabile.

   Sia ora $f = \chi_F$, $F \in \mathcal{M}$. Si osservi che $\chi_{\varphi(F)} = \chi_F \circ \varphi^{-1}$, perché $y \in \varphi(F)$ se e solo se $\varphi^{-1}(y) \in F$. Allora
$$\int_X \chi_F \, d\mu = \mu(F) = \nu(\varphi(F)) = \int_Y \chi_{\varphi(F)} \, d\nu = \int_Y (\chi_F \circ \varphi^{-1}) \, d\nu\,,$$
e quindi $\chi_F \in L^1(\mu)$ se e solo se $\chi_F \circ \varphi^{-1} \in L^1(\nu)$. Per linearità, si ottiene che se f è funzione semplice, allora $f \in L^1(\mu)$ se e solo se $f \circ \varphi^{-1} \in L^1(\nu)$, e vale
$$\int_X f \, d\mu = \int_Y (f \circ \varphi^{-1}) \, d\nu\,.$$
   Sia ora $f : X \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ misurabile, e sia $\{f_n\}_{n \geq 1}$ successione crescente di funzioni semplici puntualmente convergente ad f. Allora $\{f_n \varphi^{-1}\}_{n \geq 1}$ è successione crescente di funzioni semplici puntualmente convergente ad $f\varphi^{-1}$. Allora
$$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_Y (f_n \circ \varphi^{-1}) \, d\nu = \int_Y (f \circ \varphi^{-1}) \, d\nu\,,$$
da cui la conclusione. Se f non ha un segno fissato, si ripete l'argomento per f^+ e f^-.

Esercizio 2

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura

1. Provare che $L^1(\mu)$ è completo.

Siano $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, funzioni misurabili tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f - f_n\|_1 < \infty \,.$$

Provare che

2. $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge q.o. ad f;
3. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E^c) < \varepsilon$ e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente ad f in E.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Grazie al teorema della convergenza monotona si ha
$$\int_X \sum_{n\geq 1} |f_n - f| \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X |f_n - f| \, d\mu < +\infty \,,$$
e quindi
$$g(x) = \sum_{n\geq 1} |f_n(x) - f(x)| < +\infty \quad \text{per q.o. } x \in X \,,$$
da cui si deduce che $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ per $n \to \infty$ per q.o..
3. Posto
$$E_n(k) = \bigcup_{p=n}^{\infty} \big\{x \in X : |f_p(x) - f(x)| \geq 1/k\big\} \,, \qquad n, k \geq 1, ,$$
si osservi che $E_{n+1}(k) \subseteq E_n(k)$ e che, grazie alla disuguaglianza di Chebyshev, vale
$$\mu(E_n(k)) \leq \sum_{p\geq n} \mu\Big(\big\{x \in X : |f_p(x) - f(x)| \geq 1/k\big\}\Big) \leq k \sum_{p\geq n} \|f_p - f\|_1 \to 0 \quad \text{per } n \to \infty \,.$$
Allora si ha
$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1} E_n(k)\Big) = \lim_n \mu(E_n(k)) = 0 \,.$$
Sia ora $\varepsilon > 0$ fissato. Per ogni k esiste n_k tale che
$$\mu(E_n(k)) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \forall n \geq n_k \,.$$
Sia
$$E^c = \bigcup_{k\geq 1} E_{n_k}(k) \,,$$
cosicché
$$\mu(E^c) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon \,.$$
D'altra parte, essendo $E_p(k) \subseteq E_{n_k}(k)$ per ogni $p \geq n_k$, e quindi $E_p(k)^c \supseteq E_{n_k}(k)^c$ per ogni $p \geq n_k$, si ha
$$x \in E \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{k\geq 1} (E_{n_k}(k))^c \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{p\geq n_k} \big\{x \in X : |f_p(x) - f(x)| < 1/k\big\} \,,$$
da cui
$$|f_p(x) - f(x)| < 1/k \quad \forall p \geq n_k$$
e comunque si scelga $x \in E$. Se ne deduce che $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente ad f in E.

Esercizio 3

Siano date le funzioni reali di variabile reale

$$F(x) = e^{2x}\chi_{]-\infty,0[} + 3e^{-4x}\chi_{[0,+\infty[}\,, \qquad G(y) = e^{-3|y|} + e^{-2y}\chi_{[0,+\infty[}\,,$$

e siano μ_F e μ_G le misure di Lebesgue-Stieltjies associate ad F e G, rispettivamente.

1. Calcolare delle decomposizioni di Hahn di μ_F e μ_G, la loro decomposizione in parti positiva e negativa e le loro parti singolari e assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue.

2. Trovare per quali $1 \le p < \infty$ la funzione $g(x,y) = e^{x+y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, appartiene a $L^p(|\mu_F| \otimes |\mu_G|)$.

3. Stabilire per quali $1 \le p < \infty$ la successione di funzioni definita da

$$f_n(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y)\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n\,, \qquad n \ge 1\,,\ (x,y) \in R^2\,,$$

converge in $L^p(|\mu_F| \otimes |\mu_G|)$.

Svolgimento

1. Essendo F e G entrambi crescenti in $]-\infty,0]$ e decrescenti in $[0,+\infty[$, ed avendo entrambe un punto di salto in $x=0$, si ricava che $P =]-\infty,0]$ e $N =]0,+\infty[$ sono, rispettivamente, insieme positivo e insieme negativo per μ_F e μ_G.

   Inoltre,

$$\mu_F^+ = 2e^{2x}\chi_{]-\infty,0[}(x)\,dx + 2\delta_0\,, \qquad \mu_F^- = 12e^{-4x}\chi_{]0,+\infty[}\,dx$$
$$\mu_G^+ = 3e^{3y}\chi_{]-\infty,0[}(y)\,dy + \delta_0\,, \qquad \mu_G^- = (3e^{-3y} + 2e^{-2y})\chi_{]0,+\infty[}(y)\,dy$$

   sono le decomposizioni in parte positiva e parte negativa di μ_F e μ_G. Riguardo alle parti assolutamente continue e singolari rispetto alla misura di Lebesgue, sfruttando il lavoro già fatto si trova che

$$\left(2e^{2x}\chi_{]-\infty,0[}(x) - 12e^{-4x}\chi_{]0,+\infty[}\right)dx\,, \qquad 2\delta_0\,,$$

   sono quelle relative a μ_F, mentre

$$\left(3e^{3y}\chi_{]-\infty,0[}(y) - (3e^{-3y} + 2e^{-2y})\chi_{]0,+\infty[}(y)\right)dy\,, \qquad \delta_0\,,$$

   sonon quelle relative a μ_G.

2. Si osservi che $|\mu_F|$ e $|\mu_G|$ sono misure finite perché

$$|\mu_F|(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^0 2e^{2x}\,dx + \int_0^{+\infty} 12e^{-4x}\,dx + 2 < +\infty\,,$$
$$|\mu_G|(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^0 3e^{3y}\,dy + \int_0^{+\infty} (3e^{-3y} + 2e^{-2y})\,dy + 1 < +\infty\,.$$

   Essendo g non negativa, possiamo allora utilizzare il teorema di Tonelli e ottenere

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{p(x+y)}\,d|\mu_F| \otimes d|\mu_G|(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{p(x+y)}\,d|\mu_G|(y)\right) d|\mu_F|(x)$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{px}\,d|\mu_F|(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{py}\,d|\mu_G|(y)\right)\,.$$

Considerato che $p \geq 1$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} e^{px} \, d|\mu_F|(x) = 2 \int_{-\infty}^{0} e^{(p+2)x} \, dx + 2 + 12 \int_{0}^{+\infty} e^{(p-4)x} \, dx < +\infty$$

se e solo se $1 \leq p < 4$, e

$$\int_{\mathbb{R}} e^{py} \, d|\mu_G|(y) = 3 \int_{-\infty}^{0} e^{(p+3)y} \, dy + 1 + \int_{0}^{+\infty} \left(3e^{(p-3)y} + 2e^{(p-2)y}\right) dy < +\infty$$

se e se $1 \leq p < 2$. Allora $g \in L^p(|\mu_F| \otimes |\mu_G|)$ se e solo se $1 \leq p < 2$.

3. Si osservi preliminarmente che

$$\lim_n f_n(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y) e^{x+y} \doteq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

ed essendo

$$|f(x,y)| = e^{x+y} ,$$

dal punto precedente si deduce che necessariamente deve essere $p < 2$. Inoltre, si ha

$$|f_n(x,y)| \leq e^{x+y} ,$$

e quindi il teorema della convergenza dominata permette di concludere che $f_n \to f$ in $L^p(|\mu_F| \otimes |\mu_G|)$ per ogni $1 \leq p < 2$.