Analisi Reale - a.a. 2017/2018

Soluzione della simulazione del compito

Esercizio 1

1. Si enunci e dimostri il teorema di Caratheodory.
2. Sia μ^* misura esterna su un insieme X e $\mathcal{M}$ la σ-algebra dei suoi insiemi misurabili. Provare che $E \in \mathcal{M}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tale che $\mu^*(E \triangle E_\varepsilon) < \varepsilon$.

   Sugg.: ricordare che se $\mu^*(N) = 0$, allora $N \in \mathcal{M}$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Per la necessità basta prendere $E_\varepsilon = E$.

   Sufficienza. Per ogni $n, k \geq 1$ sia $E_{n,k} \in \mathcal{M}$ tale che
   $$\mu^*(E \triangle E_{n,k}) < \frac{1}{n2^k}\,.$$
   Sia $E_n = \cup_{k\geq 1} E_{n,k} \in \mathcal{M}$. Allora
   $$\mu^*(E_n \setminus E) \leq \sum_{k\geq 1} \mu^*(E_{n,k} \setminus E) < \frac{1}{n}\,,$$
   ed inoltre
   $$\mu^*(E \setminus E_n) \leq \mu^*(E \setminus E_{n,k}) < \frac{1}{n2^k} \quad \forall k \geq 1\,,$$
   da cui $\mu^*(E \setminus E_n) = 0$, e quindi $E \setminus E_n \in \mathcal{M}$. Sia ora $\widetilde{E} = \cap_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{M}$. Allora
   $$E = (E \cap \widetilde{E}) \cup (E \setminus \widetilde{E})\,.$$
   Si ha
   $$E \setminus \widetilde{E} = \bigcup_{n\geq 1} E \setminus E_n \in \mathcal{M}\,.$$
   Inoltre
   $$(E \cap \widetilde{E}) = \widetilde{E} \setminus (\widetilde{E} \setminus E)$$
   e vale
   $$\mu^*(\widetilde{E} \setminus E) \leq \mu^*(E_n \setminus E) < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1\,,$$
   da cui $\mu^*(\widetilde{E} \setminus E) = 0$ e quindi $\widetilde{E} \setminus E \in \mathcal{M}$, e si conclude.

Esercizio 2

Sia $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$.

1. Provare che, se $1 < p < \infty$, allora la successione di funzioni definita da $u_n(x) = u_0(x+n)$, $n \geq 1$, converge debolmente a zero in $L^p(\mathbb{R})$.
2. Si assuma ora che $p = \infty$ e che
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad m\big(\{x : |u_0(x)| > \varepsilon\}\big) < \infty\,,$$
   dove m è la misura di Lebesgue. Definita u_n come sopra, provare che
   $$\lim_n \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R})\,.$$
3. Sia ora $u_0 = \chi_{]0,1[}$ e u_n come sopra. Si dimostri che non esistono sottosuccessioni di $\{u_n\}_{n\geq 1}$ debolmente convergenti in $L^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento

1. Sia q esponente coiungato di p. Fissata $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$ e posto $\tilde{u}_0(x) = u_0(-x)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_0(-n-x)\varphi(x)\,dx = \tilde{u_0} * \varphi(-n)\,,$$

   che tende a zero per $n \to +\infty$ essendo p e q esponenti coinugati con $1 < p < \infty$.

2. Sia $\varepsilon > 0$ fissato e sia

$$E_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R} : |u_0(x)| > \varepsilon\big\}\,.$$

   Posto

$$u_1(x) = u_0(x)\chi_{E_\varepsilon^c}(x)\,, \quad u_2(x) = u_0(x)\chi_{E_\varepsilon}(x)\,, \quad u_0(x) = u_1(x) + u_2(x)\,,$$

   si ha $u_2 \in L^2(\mathbb{R})$ perché $\|u_2\|_\infty \le \|u_0\|_\infty$ e $m(E_\varepsilon) < \infty$. Allora

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} u_2(x+n)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})\,.$$

   D'altra parte, se $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u_1(x+n)\varphi(x)\,dx\right| \le \varepsilon\|\varphi\|_1\,.$$

   Allora, fissata $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ tale che $\|\varphi - g\|_1 < \varepsilon$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \le& \left|\int_{\mathbb{R}} u_1(x+n)\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} u_2(x+n)\big(\varphi(x) - g(x)\big)\,dx\right| \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}} u_2(x+n)g(x)\,dx\right| \\ \le& \ \varepsilon\|\varphi\|_1 + \|u_0\|_\infty\|\varphi - g\|_1 + \left|\int_{\mathbb{R}} u_2(x+n)g(x)\,dx\right|\,,\end{aligned}$$

   e quindi

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \le \varepsilon\|\varphi\|_1 + \varepsilon\|u_0\|_\infty\,,$$

   da cui la conclusione.

3. Facile: fissata $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,1[}(x+n)\varphi(x)\,dx = \int_{-n}^{1-n} \varphi(x)\,dx\,,$$

   e si conclude.

Esercizio 3

Siano $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arctan x & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 2\cos x & \text{se} \quad 0 \le x < \pi/2\,, \\ -e^{-x} & \text{se} \quad x \ge \pi/2\,, \end{cases}$$

e μ_F la misura con segno associata ad F.

1. Calcolare $T_F(x) = \mathrm{TV}_{]-\infty,x]}\,F$ e le parti assolutamente continua e singolare di μ_F rispetto alla misura di Lebesgue.

2. Calcolare la decomposizione di Hahn di μ_F.

3. Calcolare la decomposizione di Jordan di μ_F, $\mu = \mu_F^+ - \mu_F^-$.

4. Dato
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le y \le 2\},$$
calcolare $m \otimes \mu_F^+(T)$ e $m \otimes \mu_F^-(T)$, dove m è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Svolgimento

1. Grazie alle proprietà di monotonia di F in $]-\infty, 0]$, $[0, \pi/2]$ e $[\pi/2, +\infty[$ si ha
$$T_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arctan x & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 4 - 2\cos x & \text{se} \quad 0 \le x < \pi/2\,, \\ 4 + 2e^{-\pi/2} - e^{-x} & \text{se} \quad x \ge \pi/2\,. \end{cases}$$
Essendo $F \in \mathcal{C}^1(]-\infty, 0[\cup]0, \pi/2[\cup]\pi/2, +\infty[)$ ed avendo in $x = 0$ e $x = \pi/2$ dei punti di salto si ha che
$$\rho = \frac{1}{1+x^2}\chi_{]-\infty,0[} - 2\,\mathrm{sen}\, x\chi_{]0,\pi/2[} + e^{-x}\chi_{]\pi/2,+\infty[}\,, \quad \lambda = (2 - \pi/2)\delta_0 - e^{-\pi/2}\delta_{\pi/2}$$
sono, rispettivamente, la parte assolutamente continua e la parte singolare cercate.

2. Si ha
$$P =]-\infty, 0]\cup]\pi/2, +\infty[\,, \quad N =]0, \pi/2]\,.$$

3. Si ha
$$\mu_F^+ = \frac{1}{1+x^2}\chi_{]-\infty,0[} + (2 - \pi/2)\delta_0 + e^{-x}\chi_{]\pi/2,+\infty[}\,, \quad \mu_F^- = 2\,\mathrm{sen}\, x\chi_{]0,\pi/2[} + e^{-\pi/2}\delta_{\pi/2}\,.$$

4. Detta
$$T_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in T\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad x \le 0 \text{ o } x > 2\,, \\ [x, 2] & \text{se} \quad 0 < x \le 2\,,, \end{cases}$$
si ha
$$m \otimes \mu_F^+(T) = \int_{\mathbb{R}} \mu_F^+(T_x)\, dx = \int_0^2 \mu_F^+([x, 2])\, dx\,,$$
$$m \otimes \mu_F^-(T) = \int_{\mathbb{R}} \mu_F^-(T_x)\, dx = \int_0^2 \mu_F^+([x, 2])\, dx\,.$$
Poiché
$$\mu_F^+(T_x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0 \quad \text{o} \quad x > 2\,, \\ \displaystyle\int_{\pi/2}^2 e^{-y}\, dy & \text{se} \quad 0 < x < \pi/2\,, \\ \displaystyle\int_x^2 e^{-y}\, dy & \text{se} \quad \pi/2 \le x \le 2\,, \end{cases}$$
si ha
$$\begin{aligned} m \otimes \mu_F^+(T) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/2}^2 e^{-y}\, dy \right) dx + \int_{\pi/2}^2 \left(\int_x^2 e^{-y}\, dy \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2}(e^{-\pi/2} - e^{-2}) + \int_{\pi/2}^2 (e^{-x} - e^{-2})\, dx = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) e^{-\pi/2} - 3e^{-2}\,. \end{aligned}$$

Inoltre, essendo

$$\mu_F^-(T_x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \quad \text{ o } \quad x > \pi/2\,, \\ 2\displaystyle\int_x^{\pi/2} \operatorname{sen} y\, dy + e^{-\pi/2} & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi/2\,, \end{cases}$$

si ha

$$m \otimes \mu_F^-(T) = \int_0^{\pi/2} \left(2\int_x^{\pi/2} \operatorname{sen} y\, dy + e^{-\pi/2} \right) dx = \frac{\pi}{2} e^{-\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\pi/2} + 2\,.$$