# Analisi Reale - a.a. 2018/2019

## Soluzione del compito del 21/1/2019

### Esercizio 1

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura. Date $f, g \in L^1(\mu)$, si definisca

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu\,.$$

1. Si provi che $d$ è ben definita e che è una metrica in $L^1(\mu)$.

2. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\mu\Big(\big\{x \in X : |f(x)-g(x)| > \varepsilon\big\}\Big) \leqslant \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\, d(f,g) \tag{1}$$

   e dedurre che, se $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ converge ad $f \in L^1(\mu)$ per la metrica $d$, allora converge ad $f$ in misura.

3. Provare che, se $\mu(X) < \infty$, allora vale anche il viceversa: se $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^(\mu)$, converge ad $f \in L^1(\mu)$ in misura, allora converge anche per la metrica $d$.

Siano ora $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mu$ la misura che conta i punti.

4. Provare che la convergenza in misura equivale alla convergenza in $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

5. Provare che se $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ è successione di Cauchy per $d$, allora converge in $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

### Svolgimento

1. Che sia ben definita discende dal fatto che se $f, g$ sono misurabili, allora $|f-g|/(1+|f-g|)$ è misurabile, e che vale

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu \leqslant \int_X |f-g|\, d\mu = \|f-g\|_1\,.$$

   Il fatto che $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$ q.o. e che $d(f,g) = d(g,f)$ sono banali e sono omesse, così come la disuguaglianza triangolare che discende dal fatto che la funzione $t \mapsto t/(1+t)$ è crescente in $[0, +\infty[$ e da

$$|f-g| \leqslant |f-\varphi| + |\varphi - g|$$

   per ogni $f, g, \varphi \in L^1(\mu)$.

2. Fissato $\varepsilon > 0$, se $|f(x)-g(x)| > \varepsilon$, si ha

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,,$$

   grazie al fatto che $t \mapsto t/(1+t)$ è crescente in $[0, +\infty[$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, \mu\Big(\big\{x \in X : |f(x)-g(x)| > \varepsilon\big\}\Big) &= \int_{\{|f-g|>\varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, d\mu \\ &\leqslant \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu = d(f,g)\,,\end{aligned}$$

   da cui (1). Dedurre poi che, se $f_n \to f$ per $d$, allora $f_n \to f$ in misura è banale.

3. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Si ha
$$\lim_n \mu\Big(\big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\big\}\Big) = 0\,.$$
Allora
$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int_{\{|f_n - f| \leqslant \varepsilon\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \\ &\leqslant \varepsilon \mu(X) + \mu\Big(\big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\big\}\Big)\,, \end{aligned}$$
da cui si ottiene
$$\limsup_n d(f_n, f) \leqslant \varepsilon \mu(X)\,,$$
e quindi la conclusione per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

4. Sia $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ successione di $\ell^1(\mathbb{N})$ convergente ad $f$ in misura. Fissato $\varepsilon > 0$, si ha
$$\lim_n \#\big\{k \in \mathbb{N} : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\big\} = 0\,, \tag{2}$$
dove # indica la cardinalità. Allora, esiste $N > 0$ tale che, se $n > N$, vale
$$\#\big\{k \in \mathbb{N} : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\big\} = 0\,, \tag{3}$$
da cui
$$|f_n(k) - f(k)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > N\,, \tag{4}$$
cioè $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ per ogni $n > N$, e quindi la conclusione. Sia ora $\{f_n\}_{n \geqslant 1} \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ convergente ad $f$ in $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $N > 0$ per cui vale (4), da cui (3) e quindi (2), e si conclude.

5. Da (1) si deduce che per ogni $\varepsilon > 0$ vale
$$\mu\Big(\big\{x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| > \varepsilon\big\}\Big) \leqslant \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}\, d(f_{n+p}, f_n)\,,$$
e questo implica che
$$\lim_n \mu\Big(\big\{x \in X : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| > \varepsilon\big\}\Big) = 0$$
uniformemente in $p \geqslant 1$. Allora, per $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $N > 0$ tale che
$$\#\big\{k \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(k) - f_n(k)| > \varepsilon\big\} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > N\,,\ \forall p \geqslant 1\,,$$
da cui si deduce
$$\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \qquad \forall n > N\,,\ \forall p \geqslant 1\,.$$
Allora $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ è di Cauchy in $\ell^\infty(\mathbb{N})$, e si conclude.

## Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il teorema di convergenza dominata.

Sia data la funzione
$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(xy)}{1 + |x| + y^2}\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

2. Determinare per quali $1 \leqslant p < \infty$ si ha $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

3. Sia
$$f_n(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(xy)}{1 + n(e^{|x|/n} - 1) + y^2}\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad n \geqslant 1\,.$$
Determinare per quali $1 \leqslant p < \infty$ la successione $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ converge ad $f$ in $L^p(\mathbb{R}^2)$.

**Svolgimento**

1. Omesso.

2. Grazie al teorema di Tonelli si ottiene

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^p \, dm = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|+y^2)^p} \, dx \right) dy \,.$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|+y^2)^p} \, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad p = 1 \,, \\ \dfrac{2}{p-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+y^2)^{p-1}} \, dy & \text{se} \quad p > 1 \,, \end{cases}$$

si ottiene che $f \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ e che, se $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ se e solo se $2p - 2 > 1$, cioè se e solo se $p > 3/2$.

3. Facilmente si vede che

$$\lim_n f_n(x,y) = f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Inoltre, poiché $e^t \geqslant 1 + t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha $e^{|x|/n} - 1 \geqslant |x|/n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi

$$|f_n(x,y)| \leqslant |f(x,y)| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,, \ \forall n \geqslant 1 \,.$$

Allora $f_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $3/2 < p < \infty$ grazie al teorema di convergenza dominata.

## Esercizio 3

Fissato $\delta > 0$, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisca

$$H_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} E_j \ : \ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, \ \operatorname{diam} E_j < \delta \right\} \,,$$

dove $\operatorname{diam} E_j$ è il diametro dell'insieme $E_j$. Provare che $H_\delta$ è misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

**Svolgimento**

Banalmente, $H_\delta(\varnothing) = 0$. Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ con $E \subseteq F$. Allora

$$\left\{ \{E_j\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) : F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, \ \operatorname{diam} E_j < \delta \right\} \subseteq \left\{ \{E_j\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, \ \operatorname{diam} E_j < \delta \right\}$$

e quindi

$$H_\delta(E) = \inf \left\{ \{E_j\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, \ \operatorname{diam} E_j < \delta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \{E_j\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) : F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, \ \operatorname{diam} E_j < \delta \right\} = H_\delta(F) \,,$$

da cui la monotonia di $H_\delta$ rispetto all'inclusione. Ora dimostriamo la subadditività. Sia

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \,.$$

Se $H_\delta(A_j) = +\infty$ per qualche $j$, allora banalmente

$$H_\delta(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} H_\delta(A_J)\,.$$

Altrimenti, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $j \geqslant 1$ troviamo $\{E_{j,i}\}_{i\geqslant 1}$ tali che

$$A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{j,i}\,, \quad \operatorname{diam} E_{j,i} < \delta\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} E_{j,i} \leqslant H_\delta(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\,.$$

Allora

$$E \subseteq \bigcup_{j,i=1}^{\infty} E_{j,i}\,,$$

e quindi, essendo $\operatorname{diam} E_{j,i} < \delta$ per ogni $j, i$, si ha

$$H_\delta(E) \leqslant \sum_{j,i=1}^{\infty} \operatorname{diam} E_{j,i} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} E_{j,i} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left( H_\delta(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} H_\delta(A_j) + \varepsilon\,,$$

da cui la subadditività, grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon$.