Analisi Reale - a.a. 2018/2019

Soluzione del compito dell'11/2/2019

Esercizio 1

1. Si enunci e dimostri il teorema di continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametro.

Sia

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{x} \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

2. Si provi che F è continua e limitata.

3. Si provi che F è derivabile in $x = 0$ e che vale $F'(0) = 0$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Essendo

$$f(x,t) = \frac{\operatorname{sen}(xt)}{x} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

funzione continua per $x \neq 0$ e

$$|f(x,t)| \leq \frac{|t|}{(1+t^2)^2} \in L^1(\mathbb{R})\,, \tag{1}$$

F è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}\,,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} = F(0)\,,$$

da cui la continuità di F. Per la limitatezza, sfruttando (1) si ottiene

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{2}\,.$$

3. Poiché vale

$$|y\cos y - \operatorname{sen} y| \leq \frac{1}{2}y^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}\,,$$

si ottiene

$$|\partial_x f(x,t)| = \left| \frac{tx\cos(xt) - \operatorname{sen}(xt)}{x^2} \frac{1}{(1+t^2)^2} \right| \leq \frac{1}{2}\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \in L^1(\mathbb{R})\,. \tag{2}$$

Allora, per il teorema di derivazione sotto segno di integrale, F è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e vale

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)\, dt\,.$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to 0} \partial_x f(x,t) = \lim_{x\to 0} \frac{tx - t^3x^3/2 - tx + t^3x^3/6 + o(t^3x^3)}{x^2} \frac{1}{(1+t^2)^2} = 0 = \partial_x f(0,t) \qquad \forall t\,,$$

e grazie a (2), per il teorema di derivabilità di integrali dipendenti da parametro, si ottiene $F'(0) = 0$.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$F(x) = e^{2x}\,\chi_{]-\infty,0[}(x) - 2x\,\chi_{[0,1[}(x) + \arctan x\,\chi_{[1,+\infty[}(x)\,.$$

1. Calcolare T_F, funzione variazione totale di F, e provare che $F \in NBV$.
2. Calcolare la misura di Lebesgue-Stieltjes μ_F associata ad F, le sue decomposizioni di Hahn e Jordan e la sua decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue m.
3. Per ogni $n \geq 1$ naturale sia
$$f_n(x) = n\,\mathrm{sen}(x/n)\,\chi_{]-\infty,0[}(x) + (1 + e^{-nx})\,\chi_{]1/2,+\infty[}(x)\,.$$
Provare che la successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge in $L^p(|\mu_F|)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.
4. Sia
$$T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x \leq 2\big\}\,.$$
Calcolare $\mu_F^+ \times m(T)$, $\mu_F^- \times m(T)$ e $|\mu_F| \times m(T)$.

Svolgimento

1. Un abbozzo del grafico di F si trova in figura 1. F è crescente in $]-\infty, 0[$ e in $[1, +\infty[$, mentre è decrescente in $[0, 1[$. Allora si trova

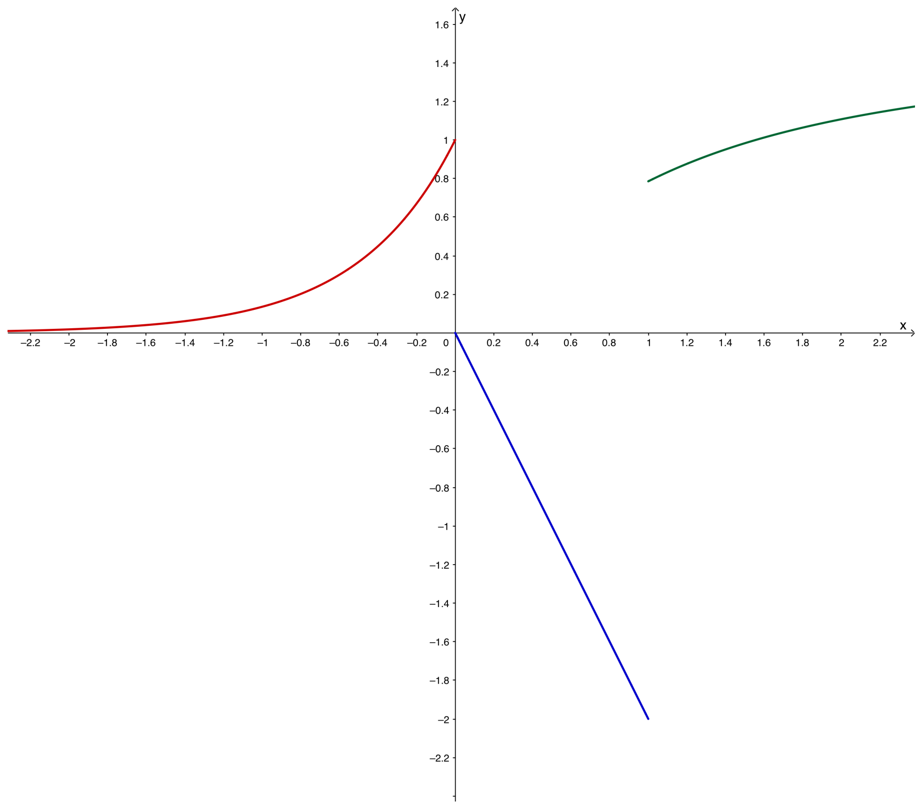

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 2 (gli assi hanno scale diverse)

$$T_F(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x < 0\,, \\ 2 + 2x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ 6 + \arctan x & \text{se} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

Si deduce che
$$TV_{\mathbb{R}}F = \lim_{x\to+\infty} T_F(x) = 6 + \frac{\pi}{2} < +\infty\,.$$
Essendo anche F banalmente continua a destra e
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,$$
si conclude che F è NBV.

2. F è di classe $\mathcal{C}^1$ in $]-\infty,0[$, in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$ e ha due punti di salto in $x=0$ e in $x=1$. Allora
$$d\mu_F = \left(2e^{2x}\chi_{]-\infty,0[} - 2\chi_{]0,1[} + \frac{1}{1+x^2}\chi_{]1,+\infty[}\right) dm - \delta_0 + \left(2+\frac{\pi}{4}\right)\delta_1\,,$$
che rappresenta anche la sua decomposizione nelle parti assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue. Per la decomposizione di Hahn, visti gli intervalli di crescenza e decrescenza di F, si ha
$$P =]-\infty,0[\cup[1,+\infty]\,, \qquad N = [0,1[\,,$$
e quindi
$$d\mu_F^+ = \left(2e^{2x}\chi_{]-\infty,0[} + \frac{1}{1+x^2}\chi_{]1,+\infty[}\right) dm + \left(2+\frac{\pi}{4}\right)\delta_1 \qquad d\mu_F^- = 2\chi_{]0,1[}\,dm + \delta_0\,,$$
è la decomposizione di Jordan di F.

3. Si ha
$$\lim_n f_n(x) = f(x) \doteq x\,\chi_{]-\infty,0[}(x) + \chi_{]1/2,+\infty[}(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}\,,$$
ed inoltre
$$|f_n(x)| \le g(x) \doteq |x|\,\chi_{]-\infty,0[}(x) + 2\,\chi_{]1/2,+\infty[}(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}\,,\ n\ge 1\,.$$
Poiché
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,d|\mu_F|(x) &= \int_{]-\infty,0[} 2|x|^p e^{2x}\,dx + 2\int_{]1/2,1[} 2\,dx + 2\left(2+\frac{\pi}{4}\right)\\ &\quad + \int_{]1,+\infty[} \frac{2}{1+x^2}\,dx\\ &= \int_{]-\infty,0[} 2|x|^p e^{2x}\,dx + 6 + \pi < +\infty\end{aligned}$$
perché $|x|^p e^{2x} \le e^x$ definitivamente per $x\to-\infty$ e la funzione $x\mapsto e^x$ è integrabile in $]-\infty,0[$ rispetton alla misura di Lebesgue. Allora g appartiene ad $L^p(|\mu_F|)$ per ogni $1\le p<\infty$, e quindi $\{f_n\}_{n\ge1}$ converge ad f in $L^p(|\mu_F|)$ per il teorema di convergenza dominata.

4. Essendo μ_F^+ e μ_F^- misure finite e m misura σ-finita, per il teorema di Tonelli si ha
$$\mu_F^+\times m(T) = \int_0^2 \mu_F^+(T^y)\,dy\,, \qquad \mu_F^-\times m(T) = \int_0^2 \mu_F^-(T^y)\,dy\,.$$
Poiché $T^y =]y,2]$ per ogni $y\in[0,2]$, si ha
$$\mu_F^+(T^y) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \left(2+\frac{\pi}{4}\right) & \text{se} \quad 0<y<1\,,\\ \displaystyle\int_y^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx & \text{se} \quad 1\le y\le 2\,,\end{cases}$$

e quindi

$$\mu_F^+(T^y) = \begin{cases} 2 + \arctan 2 & \text{se} \quad 0 < y < 1\,, \\ \arctan 2 - \arctan y & \text{se} \quad 1 \le y \le 2\,. \end{cases}$$

Inoltre

$$\mu_F^-(T^y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{se} \quad 0 < y < 1\,, \\ 0 & \text{se} \quad 1 \le y \le 2\,. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \mu_F^+ \times m(T) &= \int_0^1 (2 + \arctan 2)\, dy + \int_1^2 (\arctan 2 - \arctan y)\, dy \\ &= 2 + 2\arctan 2 - y \arctan y \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{y}{1+y^2}\, dy \\ &= 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)\,, \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\mu_F^- \times m(T) = \int_0^1 2(1-y)\, dy = 1\,.$$

Essendo $|\mu_F| = \mu_F^+ + \mu_F^-$, si ottiene

$$|\mu_F| \times m(T) = \mu_F^+ \times m(T) + \mu_F^- \times m(T) = 3 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)\,.$$

Simmetricamente, è possibile procedere anche così. Sempre per il teorema di Tonelli si ha

$$\mu_F^+ \times m(T) = \int_{]0,2]} m(T_x)\, d\mu_F^+(x)\,, \qquad \mu_F^- \times m(T) = \int_{]0,2]} m(T_x)\, d\mu_F^-(x)\,,$$

e poiché $T_x =]0, x[$ per ogni $x \in]0,2]$, si ha $m(T_x) = x$ e quindi

$$\mu_F^+ \times m(T) = \int_{]0,2]} x\, d\mu_F^+(x) = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\, dx + 2 + \frac{\pi}{4} = 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)\,,$$

ed inoltre

$$\mu_F^- \times m(T) = \int_{]0,2]} x\, d\mu_F^-(x) = \int_0^1 2x\, dx = 1\,.$$

Esercizio 3

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura e si definisca

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{M}\,,\; E \subseteq \bigcup_{n \ge 1} A_n \right\}\,, \qquad E \in \mathcal{P}(X)\,.$$

1. Dopo aver osservato che μ^* è misura esterna, provare che per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$ vale
$$\mu^*(E) = \inf \big\{ \mu(A) : A \in \mathcal{M}\,,\; E \subseteq A \big\}\,.$$
2. Provare che per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$ esiste $A_E \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq A_E$ e $\mu^*(E) = \mu(A)$.

Svolgimento

1. Che μ^* sia misura esterna segue direttamente dal teorema di estensione di una premisura, perché M è una σ-algebra, e quindi, in particolare, un'algebra, e di conseguenza μ una premisura. Detto
$$\rho(E) = \inf \big\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}\,,\ E \subseteq A\big\}\,,$$
poiché
$$\big\{A \in \mathcal{M}\,,\ E \subseteq A\big\} \subseteq \left\{\big\{A_n\big\}_{n\geq 1} : A_n \in \mathcal{M}\,,\ E \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n\right\},$$
si ottiene facilmente che $\mu^*(E) \leq \rho(E)$. D'altra parte, se $\mu^*(E) < +\infty$ (altrimenti è banale), fissato $\varepsilon > 0$, sia $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che
$$E \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon\,.$$
Allora $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$ e
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon\,,$$
e quindi $\rho(E) \leq \mu^*(E)$.

2. Sia $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq A_n$ per ogni n e $\mu(A_n) \to \mu^*(E)$ per $n \to \infty$. Si ponga
$$B_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\,, \qquad A_E = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n\,.$$
Allora $B_{n+1} \subseteq B_n$ per ogni n e quindi
$$\mu(A_E) = \lim_n \mu(B_n)\,.$$
Essendo $E \subseteq B_n$ per ogni n, vale $\mu^*(E) \leq \mu(B_n) \leq \mu(A_n)$, da cui $\mu(A_E) = \mu^*(E)$.