

Analisi Reale - a.a. 2018/2019

Soluzione del compito del 15/7/2019

Esercizio 1

Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = -(\arctan x) \chi_{]-\infty, -1[}(x) + (x + 1) \chi_{[-1, 1[}(x) + e^{-3x} \chi_{[1, +\infty[}(x)$$

1. Calcolare T_F , funzione variazione totale di F , provare che $F \in BV(\mathbb{R})$.
2. Detta μ_F la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F , calcolare le sue decomposizioni di Hahn e Jordan e le sue parti singolare e assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.
3. Dopo aver enunciato il teorema di continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da parametro, si ponga

$$G(t) = \begin{cases} \int_{[-1, +\infty[} \frac{e^{xt} - 1}{x} d|\mu_F|(x) & \text{se } -2 \leq t < 2, \\ 0 & \text{se } t \notin [-2, 2[. \end{cases}$$

Provare che G è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e che $G \in \mathcal{C}^1(]-2, 2[)$. Calcolare poi $G'(t)$ per $-2 < t < 2$.

Sugg.: può essere utile sapere che $0 < \frac{e^y - 1}{y} \leq \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$ per ogni $y \leq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Detta μ_G la misura di Lebesgue-Stieltjes associata a G , calcolare $m \times |\mu_G|(D)$, dove

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t(3 - t), 0 < t < 1\}.$$

Svolgimento

1. Un abbozzo del grafico di F si trova in figura 1. F è decrescente in $]-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty[$, mentre è crescente in $[-1, 1[$. Sfruttando queste considerazioni si trova

$$T_F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan x & \text{se } x < -1, \\ \frac{\pi}{2} + x + 1 & \text{se } -1 \leq x < 1, \\ \frac{\pi}{2} + 4 - e^{-3x} & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\text{TV}_{\mathbb{R}} F = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_F(x) = \frac{\pi}{2} + 4 < +\infty,$$

e quindi $F \in BV(\mathbb{R})$.

2. Poiché F è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in -1 e 1 , si ha

$$d\mu_F = -\frac{1}{1+x^2} \chi_{]-\infty, -1[} dm - \frac{\pi}{4} \delta_{-1} + \chi_{[-1, 1[} dm - (2 - e^{-3}) \delta_1 - 3e^{-3x} \chi_{[1, +\infty[} dm.$$

Visti gli intervalli di crescita/decrecenza di F , gli insiemi positivo e negativo sono, rispettivamente,

$$P =]-1, 1[, \quad N =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

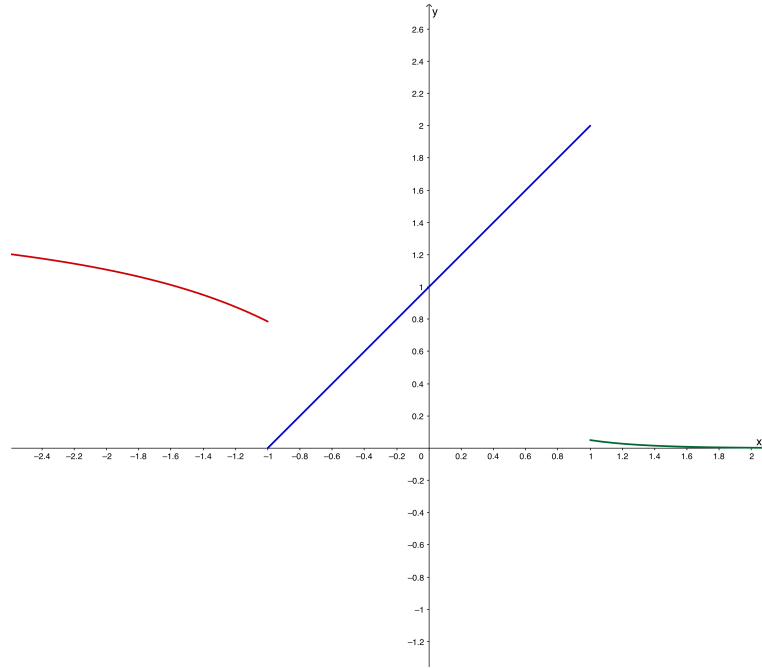


Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 1 (gli assi hanno scale diverse)

la decomposizione di Jordan è data da

$$d\mu_F^+ = \chi_{]-1,1[} dm, \quad d\mu_F^- = \frac{1}{1+x^2} \chi_{]-\infty,-1[} dm + \frac{\pi}{4} \delta_{-1} + (2 - e^{-3}) \delta_1 + 3e^{-3x} \chi_{]1,+\infty[} dm,$$

mentre le sue parti assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue sono

$$d\lambda = \left(-\frac{1}{1+x^2} \chi_{]-\infty,-1[} + \chi_{]-1,1[} - 3e^{-3x} \chi_{]1,+\infty[} \right) dm \quad d\rho = -\frac{\pi}{4} \delta_{-1} - (2 - e^{-3}) \delta_1,$$

rispettivamente.

3. L'enunciato del teorema è omissso.

Per provare che G è ben definita è sufficiente dimostrare che la funzione

$$x \mapsto \frac{e^{xt} - 1}{x} \chi_{[-1,+\infty[}(x)$$

appartiene a $L^1(|\mu_F|)$ per ogni $t \in [-2, 2[$, dove

$$d|\mu_F| = \frac{1}{1+x^2} \chi_{]-\infty,-1[} dm + \frac{\pi}{4} \delta_{-1} + \chi_{]-1,1[} dm + (2 - e^{-3}) \delta_1 + 3e^{-3x} \chi_{]1,+\infty[} dm. \quad (1)$$

Quindi deve essere

$$\frac{\pi}{4} |e^{-t} - 1| + (2 - e^{-3}) |e^t - 1| + \int_{-1}^1 \left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| dx + 3 \int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| e^{-3x} dx < +\infty$$

per ogni $t \in [-2, 2[$. Posto che per $t \in [-2, 2[$ vale

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| e^{-3x} dx \leq \int_1^{+\infty} (e^{2x} - 1) e^{-3x} dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1},$$

resta da verificare che

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| dx < +\infty \quad \forall t \in [-2, 2[.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| = |t|,$$

la funzione integranda è prolungabile per continuità in $x = 0$ per ogni t e quindi integrabile in $[-1, 1]$ rispetto alla misura di Lebesgue. Per provare che G è di classe $\mathcal{C}^1$ in $] -2, 2[$ utilizziamo il teorema di continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da parametro. La funzione integranda è banalmente continua nella variabile t e vale

$$\left| \frac{e^{xt} - 1}{x} \right| = |t| \left| \frac{e^{xt} - 1}{xt} \right| \leq |t| \frac{e^{2|x|} - 1}{2|x|} \leq 2 \frac{e^{2|x|} - 1}{2|x|} \quad \forall t \in] -2, 2[, \quad \forall x \geq -1,$$

dove si è sfruttato il suggerimento ed il fatto che $xt \leq 2|x|$ per ogni $t \in] -2, 2[$. Sfruttando il lavoro fatto prima, si conclude facilmente che la funzione

$$x \mapsto 2 \frac{e^{2|x|} - 1}{2|x|} \chi_{-1, +\infty[}(x)$$

appartiene a $L^1(|\mu_F|)$, e che quindi G è continua in $] -2, 2[$. Quando a G' , si ha

$$\partial_t \left(\frac{e^{xt} - 1}{x} \right) = e^{xt},$$

e quindi

$$\left| \partial_t \left(\frac{e^{xt} - 1}{x} \right) \right| \leq e^{2|x|}, \quad (2)$$

e si conclude che G è derivabile in $] -2, 2[$ e vale

$$G'(t) = \int_{[-1, +\infty[} e^{xt} d|\mu_F|(x). \quad (3)$$

Riapplicando nuovamente il teorema di continuità degli integrali dipendenti da parametro e sfruttando (2), si deduce che $G' \in \mathcal{C}^0(] -2, 2[)$.

4. Poiché G è $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in -2 e 2 , si ha

$$d\mu_G = G(-2) \delta_{-2} - G(2) \delta_2 + G'(t) \chi_{]-2, 2[}(t) dm.$$

Grazie al teorema di Fubini-Tonelli si ha

$$m \times |\mu_G|(D) = \int_0^1 m(D^t) d\mu_G(t) = \int_0^1 m(D^t) G'(t) dt,$$

dove

$$D^t =]0, t(3-t)[, \quad m(D^t) = t(3-t).$$

Da (3), sfruttando (1) e tenendo conto che $t < 2$, si ottiene

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\pi}{4} e^{-t} + (2 - e^{-3})e^t + \int_{-1}^1 e^{xt} dx + 3 \int_1^{+\infty} e^{xt} e^{-3x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} e^{-t} + (2 - e^{-3})e^t + \frac{e^t - e^{-t}}{t} + \frac{3}{3-t} e^{t-3}, \quad t \in] -2, 2[. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} m \times |\mu_G|(D) &= \int_0^1 \left[\frac{\pi}{4} t(3-t) e^{-t} + (2 - e^{-3})t(3-t) e^t + (3-t)(e^t - e^{-t}) + 3te^{t-3} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(\left(\frac{3}{4}\pi + 1 \right) t - \frac{\pi}{4} t^2 - 3 \right) e^{-t} + (5t + 3 - (2 - e^{-3})t^2) e^t \right] dt. \end{aligned}$$

Integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\left(\frac{3}{4}\pi + 1 \right) t - \frac{\pi}{4} t^2 - 3 \right) e^{-t} dt &= - \left(\left(\frac{3}{4}\pi + 1 \right) t - \frac{\pi}{4} t^2 - 3 \right) e^{-t} \Big|_0^1 + \\
&\quad + \int_0^1 \left(\frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{\pi}{2} t \right) e^{-t} dt \\
&= \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) e^{-1} - 3 - \left(\frac{3}{4}\pi + 1 - \frac{\pi}{2} t \right) e^{-t} \Big|_0^1 - \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{-t} dt \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) e^{-1} - 2 + \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (5t + 3 - (2 - e^{-3})t^2) e^t dt &= (5t + 3 - (2 - e^{-3})t^2) e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 (5 - 2(2 - e^{-3})t) e^t dt \\
&= 6e + e^{-2} - 3 - (5 - 2(2 - e^{-3})t) e^t \Big|_0^1 - 2(2 - e^{-3}) \int_0^1 e^t dt \\
&= 6 + e + 2^{-2} - 2e^{-3},
\end{aligned}$$

da cui

$$m \times |\mu_G|(D) = \frac{\pi}{4} + 4 + e + \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) e^{-1} + 2^{-2} - 2e^{-3}.$$

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il lemma di Fatou.

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura e $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq L^+(X)$ tale che $f_n \rightarrow f \in L^+(X)$ puntualmente e

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu < +\infty.$$

2. Provare che vale

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}. \quad (4)$$

3. Provare con un controesempio che, in generale, (4) non vale se

$$\int_X f_n d\mu < +\infty \quad \forall n \geq 1, \quad \text{e} \quad \lim_n \int_X f_n d\mu = +\infty.$$

Svolgimento

1. Omesso.
2. Per il lemma di Fatou

$$\int_E f d\mu = \int_E \lim_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu.$$

Si osservi ora che, fissato $E \in \mathcal{M}$, $\{f_n - f_n \chi_E\}_{n \geq 1} \subseteq L^+(X)$ e $f_n - f_n \chi_E \rightarrow f - f \chi_E \in L^+(X)$ puntualmente. Allora, sempre per il lemma di Fatou ed essendo $f \in L^1(\mu)$, si ha

$$\int_X f d\mu - \int_E f d\mu = \int_X (f - f \chi_E) d\mu \leq \liminf_n \int_X (f_n - f_n \chi_E) d\mu = \int_X f d\mu - \limsup_n \int_E f_n d\mu,$$

da cui

$$\limsup_n \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu,$$

e quindi la conclusione.

3. È sufficiente prendere $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$, $f_n = n^2 \chi_{]0, 1/n[}$ e $E = \mathbb{R}$. Allora $f_n \rightarrow 0$ puntualmente, ma

$$\int_{\mathbb{R}} 0 \, dm = 0, \quad \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \lim_n n = +\infty.$$

Esercizio 3

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura, $p_0 > 0$ e $f \in L^{p_0}(\mu)$. Sia

$$E = \{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

e si supponga $\mu(E) < +\infty$.

1. Si dimostri che $f \in L^p(\mu)$ per ogni $0 < p \leq p_0$.

2. Si provi che

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \int_X |f|^p \, d\mu = \mu(E).$$

Svolgimento

1. Per $0 < p \leq p_0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) &= \int_{\{|f(x)| \leq 1\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) + \int_{\{|f(x)| > 1\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\leq \int_E 1 \, d\mu(x) + \int_X |f(x)|^{p_0} \, d\mu(x) = \mu(E) + \int_X |f(x)|^{p_0} \, d\mu(x) < +\infty. \end{aligned}$$

2. Sia $\{p_n\}_{n \geq 1}$, $p_n > 0$, successione infinitesima. Non è restrittivo assumere $p_n \leq p_0$ per ogni $n \geq 1$. Allora

$$|f(x)|^{p_n} = |f(x)|^{p_n} \chi_{\{|f(x)| \leq 1\}} + |f(x)|^{p_n} \chi_{\{|f(x)| > 1\}} \leq \chi_E(x) + |f(x)|^{p_0},$$

che è funzione di $L^1(\mu)$. Allora, per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f(x)|^{p_n} \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f(x)|^{p_n} \, d\mu(x) = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x)|^{p_n} \, d\mu(x) = \mu(E).$$