Analisi Reale - a.a. 2019/2020

Soluzione del compito del 28/1/2020

Esercizio 1

1. Sia dia la definizione di misura su un insieme X e si provino la continuità dall'alto e dal basso di una misura.

Siano $X \neq \varnothing$ un insieme, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra, μ_0 una premisura σ-finita su $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}$, μ^* la misura esterna su X definita a partire da μ_0 e μ l'estensione di μ_0 a $\mathcal{M}$.

2. Si scriva la definizione di μ^*.

3. Provare che per ogni $C \subseteq X$ esiste $E \in \mathcal{M}$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu^*(C) = \mu(E)$.

4. Provare che se $\{C_k\}_{k \geqslant 1}$ è successione crescente di insiemi di $\mathcal{P}(X)$, allora

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k \geqslant 1} C_k\Big) = \lim_k \mu^*(C_k)\,.$$

   Sugg.: preso $E_k \in \mathcal{M}$ tale che $C_k \subseteq E_k$ e $\mu^*(C_k) = \mu(E_k)$, si consideri $F_k = \bigcap_{j \geqslant k} E_j$ e si provi che $\mu(F_k) = \mu^*(C_k)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Dato $C \subseteq X$, si ha

$$\mu^*(C) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : \{A_j\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{A}\,,\ C \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}.$$

3. Sia $C \in \mathcal{P}(X)$. Se $\mu^*(C) = +\infty$, allora è sufficiente prendere $E = X$. Altrimenti, fissato $k \geqslant 1$, sia $\{A_j^k\}_{j \geqslant 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$C \subseteq \bigcup_{j \geqslant 1} A_j^k\,, \qquad \sum_{j \geqslant 1} \mu_0(A_j^k) \leqslant \mu^*(C) + \frac{1}{k}\,.$$

   Si definisca

$$E = \bigcap_{k \geqslant 1} \bigcup_{j \geqslant 1} A_j^k\,.$$

   Allora $E \in \mathcal{M}$, $C \subseteq E$, e quindi $\mu^*(C) \leqslant \mu^*(E) = \mu(E)$, e per ogni $k \geqslant 1$ vale

$$\mu(E) \leqslant \mu\Bigg(\bigcup_{j \geqslant 1} A_j^k\Bigg) \leqslant \sum_{j \geqslant 1} \mu_0(A_j^k) \leqslant \mu^*(C) + \frac{1}{k}\,,$$

   da cui $\mu^*(C) = \mu(E)$ per l'arbitrarietà di k.

4. Sia $E_k \in \mathcal{M}$ tale che $C_k \subseteq E_k$ e $\mu^*(C_k) = \mu(E_k)$ e si consideri

$$F_k = \bigcap_{j=1}^{k} E_j\,.$$

   Banalmente $F_k \in \mathcal{M}$. Se $j \geqslant k$ si ha

$$C_k \subseteq C_j \subseteq E_j\,,$$

e quindi $C_k \subseteq F_k$. Allora

$$\mu(F_k) \leqslant \mu(E_k) = \mu^*(C_k) \leqslant \mu^*(F_k) = \mu(F_k)\,,$$

e quindi $\mu^*(C_k) = \mu(F_k)$ per ogni $k \geqslant 1$. Poiché $F_k \subseteq F_{k+1}$, si ottiene

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} C_k\Big) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} F_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} F_k\Big) = \lim_k \mu(F_k) = \lim_k \mu^*(C_k)\,,$$

dove l'ultimo limite esiste grazie alla monotonia di μ^* e $\{C_k\}_{k\geqslant 1}$. D'altra parte

$$C_j \subseteq \bigcup_{k\geqslant 1} C_k \qquad \forall j\,,$$

e quindi

$$\lim_j \mu^*(C_j) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} C_k\Big)\,,$$

da cui la conclusione.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il lemma di Fatou.

Sia dato uno spazio con misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

2. Siano $\{f_n\}_{n\geqslant 1}, \{g_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$, con $|f_n| \leqslant g_n$ q.o., tali che
   (a) esistono $f, g : X \to \mathbb{R}$ misurabili, con $g \in L^1(\mu)$, per cui $f_n \to f$ e $g_n \to g$ q.o.;
   (b) $\lim_n \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu$

   Provare che $f \in L^1(\mu)$ e che $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.
3. Sia ora $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ tale che $\varphi_n \to \varphi \in L^1(\mu)$ q.o. Provare che $\varphi_n \to \varphi$ in $L^1(\mu)$ se e solo se $\|\varphi_n\|_1 \to \|\varphi\|_1$.
4. Fissato $1 < p < \infty$, sia $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^p(\mu)$ tale che $\varphi_n \to \varphi \in L^p(\mu)$ q.o. Provare che $\varphi_n \to \varphi$ in $L^p(\mu)$ se e solo se $\|\varphi_n\|_p \to \|\varphi\|_p$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Grazie al lemma di Fatou si ottiene

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X \liminf_n |f_n| \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X |f_n| \, d\mu \leqslant \lim_n \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu < +\infty\,,$$

   e quindi $f \in L^1(\mu)$. Poiché $g_n + f_n, g_n - f_n \in L^+(X)$ per ogni n, sempre grazie al lemma di Fatou si ha

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X \liminf_n (f_n + g_n) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X (f_n + g_n) \, d\mu = \liminf_n \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu\,,$$

$$\int_X (g-f) \, d\mu = \int_X \liminf_n (g_n - f_n) \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X (g_n - f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \limsup_n \int_X f_n \, d\mu\,,$$

   da cui la conclusione.

3. La necessità discende banalmente dal fatto che

$$\big|\|\varphi_n\|_1 - \|\varphi\|_1\big| \leqslant \|\varphi_n - \varphi\|_1 \,.$$

Vediamo la sufficienza. Posto

$$f_n = |\varphi_n - \varphi| \,, \quad g_n = |\varphi_n| + |\varphi| \,, \quad f = 0 \,, \quad g = 2|\varphi| \,,$$

siamo nelle condizioni di utilizzare il punto precedente e concludere che $\|\varphi_n - \varphi\|_1 \to 0$.

4. La necessità è nuovamente banale ed è omessa. Quanto alla sufficienza, basta prendere

$$f_n = |\varphi_n - \varphi|^p \,, \quad g_n = (|\varphi_n| + |\varphi|)^p \,, \quad f = 0 \,, \quad g = 2^{p+1}|\varphi|^p \,,$$

e utilizzare il punto 2.

Esercizio 3

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione continua a destra definita da

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2}\chi_{]-\infty,1[}(x) + xe^{1-x}\chi_{[1,+\infty[}(x) \,.$$

1. Calcolare T_F, funzione variazione totale di F e provare che $F \in NBV$
2. Detta $\mu = \mu_F$ la misura con segno di Lebesgue-Stieltjes associata ad F, calcolare le sue parti assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue, la decomposizione di Hahn e la sua decomposizione di Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$.
3. Trovare due funzioni F^+ e F^- tali che $\mu^+ = \mu_{F^+}$ e $\mu^- = \mu_{F^-}$.
4. Sia
$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y \leqslant 3\big\} \,.$$
Calcolare $m \otimes \mu^+(T)$ e $m \otimes \mu^-(T)$.

Svolgimento

Il grafico di F è riportato in figura 1

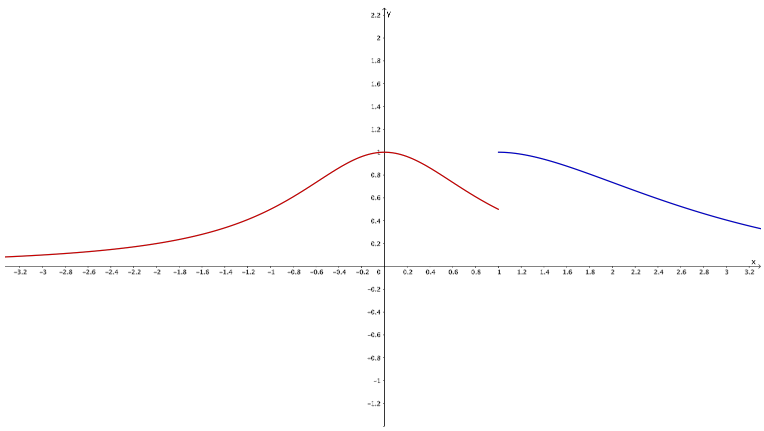

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

1. Sfruttando il fatto che F è crescente in $]-\infty,0]$, decrescente in $[0,1[$ e in $[1,+\infty[$ e che ha un punto di salto in $x=1$, si ottiene

$$T_F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad x<0\,, \\ 2-\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad 0\leqslant x<1\,, \\ 3-xe^{1-x} & \text{se} \quad x\geqslant 1\,. \end{cases}$$

Poiché

$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\, F = \lim_{x\to+\infty} T_F(x) = 3\,,$$

ed essendo banalmente F continua a destra e infinitesima a $-\infty$, si ottiene che $F \in \mathrm{NBV}$.

2. Sfruttando la regolarità di F si ottiene

$$d\mu = \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\chi_{]-\infty,1[}(x) + (1-x)e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\right)\,dx + \frac{1}{2}\delta_1\,,$$

per cui

$$\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\chi_{]-\infty,1[}(x) + (1-x)e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\right)\,dx\,, \qquad \frac{1}{2}\delta_1$$

sono, rispettivamente, la parte assolutamente continua e la parte singolare di μ rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre, sfruttando gli intervalli di monotonia di F, si ottiene

$$P =]-\infty,0[\cup\{1\}\,, \qquad N=[0,1[\cup]1,+\infty[\,,$$

e da questi si ottiene la decomposizione di Jordan (ricordare che μ^+ e μ^- sono misure positive)

$$d\mu^+ = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\chi_{]-\infty,0[}(x)\,dx + \frac{1}{2}\delta_1\,,$$

$$d\mu^- = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\chi_{[0,1[}(x) + (x-1)e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\right)\,dx\,.$$

3. F^+ e F^- devono essere funzioni crescenti, essendo μ^+ e μ^- misure positive, e continue a destra tali che

$$F^+(x) = \mu^+(]-\infty,x])\,, \qquad F^-(x)=\mu^-(]-\infty,x])\,.$$

Si noti che F^+ deve avere un salto di ampiezza $1/2$ in $x=1$, mentre F^- deve essere continua. Si ottiene

$$F^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad x<0\,, \\ 1 & \text{se} \quad 0\leqslant x<1\,, \\ \dfrac{3}{2} & \text{se} \quad x\geqslant 1\,, \end{cases} \qquad F^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x<0\,, \\ 1-\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad 0\leqslant x<1\,, \\ \dfrac{3}{2}-xe^{1-x} & \text{se} \quad x\geqslant 1\,. \end{cases}$$

4. Dal teorema di Tonelli si deduce che

$$m\otimes\mu^+(T) = \int_0^3 \mu^+(T_x)\,dx\,, \qquad m\otimes\mu^-(T) = \int_0^3 \mu^-(T_x)\,dx\,,$$

dove $T_x =]x,3]$, $0<x<3$. Poiché

$$\mu^+(T_x) = F^+(3)-F^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad 0<x<1\,, \\ 0 & \text{se} \quad 1\leqslant x<3\,, \end{cases}$$

$$\mu^-(T_x) = F^-(3)-F^-(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}-3e^{-2}+\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se} \quad 0<x<1\,, \\ xe^{1-x}-3e^{-2} & \text{se} \quad 1\leqslant x<3\,, \end{cases}$$

si ottiene $m \otimes \mu^+(T_x) = 1/2$ e

$$\begin{aligned} m \otimes \mu^-(T) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - 3e^{-2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \int_1^3 \left(xe^{1-x} - 3e^{-2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - 9e^{-2} + \arctan x \Big|_0^1 - (x+1)e^{1-x} \Big|_1^3 = \frac{5}{2} - 13e^{-2} + \frac{\pi}{4} \,. \end{aligned}$$