Analisi Reale - a.a. 2019/2020

Soluzione del compito del 11/2/2020

Esercizio 1

1. Si diano le definizioni di misura esterna e di insieme misurabile per una misura esterna.

Siano $X \neq \varnothing$ e μ^* misura esterna su X, non identicamente nulla. Sia

$$\nu^*(E) = \sqrt{\mu^*(E)}\,, \qquad E \subseteq X\,.$$

2. Si provi che ν^* è misura esterna su X.
3. Si assuma $\mu^*(X) < \infty$. Si provi che, se $A \subseteq X$ è insieme ν^*-misurabile, allora $\mu^*(A) = 0$ o $\mu^*(A^c) = 0$, dove A^c è il complementare di A.
4. Si supponga ora che μ^* sia σ-finita. Si provi che vale la stessa conclusione del punto 2, cioè che, se $A \subseteq X$ è insieme ν^*-misurabile, allora $\mu^*(A) = 0$ o $\mu^*(A^c) = 0$.

Svolgimento

1. Omesso.
2. $\nu^*(\varnothing) = 0$ e la monotonia discendono dal fatto che $\mu*$ è misura esterna e dalla monotonia della funzione radice quadrata. Bisogna provare la numerabile subadditività. Sia $\{E_j\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora
$$\nu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)}\,.$$
Poiché per ogni $n \geqslant 1$ vale
$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mu^*(E_j)}\,,$$
passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene
$$\nu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mu^*(E_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu^*(E_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu^*(E_j)\,,$$
dove i limiti esistono essendo le serie coinvolte a termini non negativi.
3. Se A è ν^* misurabile, per ogni $E \in \mathcal{P}(X)$ vale
$$\sqrt{\mu^*(E)} = \sqrt{\mu^*(E \cap A)} + \sqrt{\mu^*(E \cap A^c)}\,.$$
Preso $E = X$, si ottiene
$$\sqrt{\mu^*(X)} = \sqrt{\mu^*(A)} + \sqrt{\mu^*(A^c)}\,,$$
da cui
$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c) + 2\sqrt{\mu^*(A)\mu^*(A^c)}\,.$$
Essendo
$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$
per la subadditività di μ^*, si deduce che $\sqrt{\mu^*(A)\mu^*(A^c)} \leqslant 0$, da cui la conclusione.

4. Si osservi che, se μ^*, tale è anche ν^*. Siano $\{E_j\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tali che $\mu^*(E_j) < +\infty$ (e quindi $\nu^*(E_j) < +\infty$) e $X = \bigcup_{j\geqslant 1} E_j$. Non è restrittivo assumere che $\{E_j\}_{j\geqslant 1}$ sia successione crescente. Se A è ν^*-misurabile, replicando l'argomento utilizzato al punto 2, si ricava che $\mu^*(E_j \cap A) = 0$ oppure $\mu^*(E_j \cap A^c) = 0$. In particolare $\mu^*(E_1 \cap A) = 0$ oppure $\mu^*(E_1 \cap A^c) = 0$. Supponiamo vera la prima, in caso contrario si argomenta in modo analogo. Allora, essendo $\{E_j\}_{j\geqslant 1}$ crescente, si ha
$$\mu^*(E_j \cap A) \geqslant \mu^*(E_1 \cap A) > 0 \qquad \forall j \geqslant 1\,,$$
e quindi $\mu^*(E_k \cap A^c) = 0$ per ogni $k \geqslant 1$, da cui
$$\mu^*(A^c) = \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap A^c\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j \cap A^c) = 0\,,$$
come si voleva.

Esercizio 2

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura, $1 \leqslant p < \infty$ e $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ successione di funzioni misurabili da X in $\mathbb{R}$. Sia inoltre $f : X \to \mathbb{R}$ un'altra funzione misurabile.

1. Si dia la definizione di convergenza in misura ad f per $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ e si provi che, se $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$, allora $f_n \to f$ in misura.
2. Si provi che, se $f_n \to f$ in misura ed esiste $M > 0$ tale che $\|f_n\|_p \leqslant M$ per ogni $n \geqslant 1$, allora $f \in L^p(\mu)$.
3. Si supponga ora che $\mu(X) < +\infty$ e $\|f_n\|_p \leqslant M$ per qualche $M > 0$ e $1 < p < \infty$. Si provi che se $f_n \to f$ in misura, allora $f_n \to f$ in $L^1(\mu)$.
4. Si provi con un controesempio che, se nel punto precedente si chiede che $\|f_n\|_1 \leqslant M$ per qualche $M > 0$, allora, in generale, è falso che $f_n \to f$ in $L^1(\mu)$.

Svolgimento

1. Si omette la definizione della convergenza in misura. Grazie alla disuguaglianza di Chebyshev, fissato $\varepsilon > 0$ si ha
$$\mu\big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\big\} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}\,,$$
da cui la convergenza in misura.

2. Esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ tale che $f_{n_k} \to f$ q.o. Allora, grazie al lemma di Fatou si ottiene
$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_X \lim_k |f_{n_k}|^p\, d\mu \leqslant \liminf_k \int_X |f_{n_k}|^p\, d\mu = \liminf_k \|f_{n_k}\|_p^p \leqslant M^p\,.$$

3. Per il punto precedente $f \in L^p(\mu) \subseteq L1(\mu)$, poiché X ha misura finita. Detto q l'esponente coniugato di p, fissato $\varepsilon > 0$, si ha
$$\int_X |f_n - f|\, d\mu = \int_{\{|f_n - f| \leqslant \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f|\, d\mu \leqslant \mu(X)\varepsilon + \mu(X)^{1/q}\|f_n - f\|_p\,.$$
Per $n \to +\infty$ si ottiene $\|f_n - f\|_1 \leqslant \mu(X)\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui la conclusione.

4. Basta prendere $X = [0, 1]$ con la misura di Lebesgue e considerare $f_n = n\chi_{]0,1/n[}$. Allora $f_n \to 0$ in misura, perché per ogni $0 < \varepsilon < 1$
$$m\big(\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty\,,$$
ma $\|f_n\|_1 = 1$ per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 3

Sia
$$F(x) = \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x+1)\right) \chi_{]-\infty,-x1[}(x) + \chi_{[-1,1[}(x) + 2e^{1-x}\, \chi_{[1,+\infty[}(x)\,.$$

1. Calcolare $T_F(x)$, funzione variazione totale di F, e la decomposizione di Hahn della misura con segno di Lebesgue-Stieltjes μ associata ad F.

2. Descrivere la decomposizione di Jordan μ^+, μ^- di μ, e la decomposizione di Lebesgue-Radon-Nicodym di $\mu^\pm$ rispetto alla misura di Lebesgue.

3. Sia ora $f(x,y) = x\chi_{]0,+\infty[}(x)\chi_{]0,+\infty[}(y)$. Detto
$$D_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| > \alpha\right\}, \qquad \alpha > 0$$
calcolare $\mu^+ \otimes \mu^-(D_\alpha)$ al variare di α.

4. Calcolare $\|f\|_{L^\infty(\mu_F^+\otimes\mu_F^-)}$ e dedurre che $f \in L^p(\mu^+ \otimes \mu^-)$ per ogni $1 \leqslant p < \infty$.

Svolgimento

Il grafico di F è riportato in figura 1

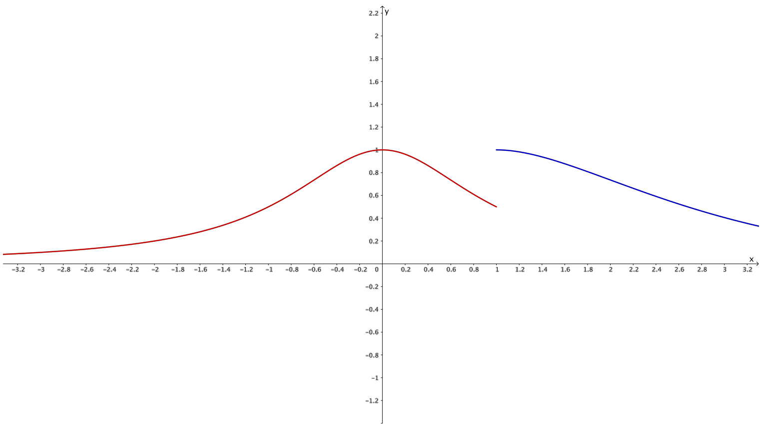

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

1. Sfruttando il fatto che F è crescente in $]-\infty,0]$, decrescente in $[0,1[$ e in $[1,+\infty[$, che ha un punti di salto in $x = \pm 1$ e che
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,$$
si ottiene
$$T_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arctan(x+1) & \text{se} \quad x < -1\,, \\ \pi - 1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x < 1\,, \\ \pi + 2 - 2e^{1-x} & \text{se} \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$
Poiché
$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\, F = \lim_{x\to+\infty} T_F(x) = \pi + 2\,,$$
ed essendo banalmente F continua a destra, si ottiene che $F \in \mathrm{NBV}$.

2. Sfruttando la regolarità di F si ottiene
$$d\mu = \left(\frac{1}{1+(x+1)^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x) - 2e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\right)\, dx + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1} + \delta_1\,,$$

per cui

$$\left(\frac{1}{1+(x+1)^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x) - 2e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\right)\,dx\,, \qquad \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}+\delta_1$$

sono, rispettivamente, la parte assolutamente continua e la parte singolare di μ rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre, sfruttando gli intervalli di monotonia di F, si ottiene

$$P =]-\infty,-1[\cup\{1\}\,, \qquad N = [-1,1[\cup]1,+\infty[\,,$$

e da questi si ottiene la decomposizione di Jordan (ricordare che μ^+ e μ^- sono misure positive)

$$\begin{aligned} d\mu^+ &= \frac{1}{1+(x+1)^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x)\,dx + \delta_1\,, \\ d\mu^- &= 2e^{1-x}\chi_{]1,+\infty[}(x)\,dx + \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\delta_{-1}\,. \end{aligned}$$

3. Si ha

$$D_\alpha = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>\alpha\,,\ y>0\right\},$$

e quindi

$$D_{\alpha,x} = \begin{cases} \varnothing & \text{se} \quad x\leqslant\alpha\,, \\ ]0,+\infty[& \text{se} \quad x>\alpha\,. \end{cases}$$

Allora, essendo μ^+ e μ^- misure finite (ricordiamo che f è a variazione totale limitata) e poiché

$$\mu^-(D_{\alpha,x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\leqslant\alpha\,, \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} 2e^{1-y}\,dy = 2 & \text{se} \quad x>\alpha\,, \end{cases}$$

per il teorema di Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \mu^+\otimes\mu^-(D_\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \mu^-(D_{\alpha,x})\,d\mu^+(x) = \int_{]\alpha,+\infty[} 2\,d\mu^+(x) = 2\delta_1(]\alpha,+\infty[) \\ &= \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \alpha<1\,, \\ 0 & \text{se} \quad \alpha\geqslant 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Poiché

$$\|f\|_{L^\infty(\mu^+\otimes\mu^-)} = \inf\left\{\alpha>0 : \mu^+\otimes\mu^-(D_\alpha)=0\right\},$$

si ha $\|f\|_{L^\infty(\mu^+\otimes\mu^-)} = 1$, ed essendo

$$\mu^+\otimes\mu^-(\mathbb{R}^2) = \mu^+(\mathbb{R})\mu^-(\mathbb{R}) = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2 < +\infty\,,$$

grazie al teorema di inclusione degli spazi L^p si deduce che $f\in L^p(\mu^+\otimes\mu^-)$ per ogni $1\leqslant p<\infty$.