Analisi Reale - a.a. 2020/2021

Soluzione del compito del 18/1/2021

Esercizio 1

Sia $X \neq \varnothing$.

1. Dati $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ contenente X e l'insieme vuoto e $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ tale che $\rho(\varnothing) = 0$, si indichi come definire una misura esterna su X a partire da ρ. Chiameremo questa misura esterna indotta da ρ.

Siano μ^* misura esterna su X e $\mathcal{M}$ la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili. Si consideri $\mu = \mu^*\Big|_{\mathcal{M}}$ e sia μ^+ la misura esterna indotta da μ.

2. Si provi che $\mu^*(E) \leqslant \mu^+(E)$ per ogni $E \subseteq X$.
3. Si provi che, dato $E \subseteq X$, si ha $\mu^*(E) = \mu^+(E)$ se e solo se esiste $A \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$.

Si supponga ora che μ^* sia indotta da una premisura μ_0 su un algebra $\mathcal{A}$.

4. Provare che per ogni $E \subseteq X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste B, unione al più numerabile di elementi di $\mathcal{A}$, tale che $E \subseteq B$ e $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$.
5. Provare che $\mu^* = \mu^+$.

Svolgimento

1. Si ha
$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) : A_j \in \mathcal{E}\,,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supseteq E \right\}.$$

2. Vale
$$\mu^+(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : A_j \in \mathcal{M}\,,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supseteq E \right\}.$$
Si osservi preliminarmente che $\mu(A) = \mu^+(A) = \mu^*(A)$ per ogni $A \in \mathcal{M}$. Per ogni $\{A_j\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{M}$ con $\bigcup_{j\geqslant 1} A_j \supseteq E$, grazie alla monotonia e alla subadditività di una misura esterna, si ha
$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,,$$
da cui $\mu^*(E) \leqslant \mu^+(E)$ per definizione di μ^+.

3. Si osservi che, fissato $E \subseteq X$, per ogni $k \geqslant 1$ esiste $\{A_j^k\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{M}$ tale che
$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^k) \leqslant \mu^+(E) + \frac{1}{k}\,.$$
Allora, se $\mu^*(E) = \mu^+(E)$, preso
$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^k\,,$$
ed osservato che $E \subseteq A$, si ottiene che per ogni $k \geqslant 1$ vale
$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^k\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j^k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^k) \leqslant \mu^+(E) + \frac{1}{k} = \mu^*(E) + \frac{1}{k}\,,$$

da cui $\mu^*(E) = \mu^*(A)$ per l'arbitrarietà di k.

Si suipponga ora che esista $A \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu^*(E) = \mu^*(A)$. Allora

$$\mu^+(E) \leqslant \mu^+(A) = \mu(A) = \mu^*(A) = \mu^*(E)\,.$$

Poiché già sappiamo che $\mu^*(E) \leqslant \mu^+(E)$, si conclude.

4. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di μ^*, esiste $\{B_j\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon\,.$$

Preso

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\,,$$

e considerato che $\mu^*(B_j) = \mu_0(B_j)$ per ogni j, si ottiene

$$\mu^*(B) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon\,.$$

5. Fissato $k \geqslant 1$, troviamo $\{B_j^k\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^k\,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j^k) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{k}\,.$$

Preso

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^k\,,$$

e osservato che $E \subseteq A \in \mathcal{M}$, procedendo come al punto 3 si ottiene

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^k\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j^k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j^k) \leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{k}\,,$$

da cui $\mu^*(E) = \mu^*(A)$ per l'arbitrarietà di $k \geqslant 1$. Si conclude utilizzando il punto 3.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il lemma di Fatou.

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio con misura. Fissati $1 < q < \infty$, sia $\overline{B}_r = \big\{f \in L^q(\mu) : \|f\|_q \leqslant r\big\}$.

2. Data $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_r$ convergente q.o. a f, dimostrare che $f \in \overline{B}_r$.
3. Sia $E \in \mathcal{M}$ di misura finita. Dimostare che, fissato $p \in [1, q[$, esiste $\alpha(p, q)$, che si chiede di calcolare, tale che

$$\left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \mu(E)^{\alpha(p,q)} r \qquad \forall f \in \overline{B}_r\,.$$

4. Si deduca che per ogni $p \in [1, q[$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta$ e per ogni $f \in \overline{B}_r$ si ha

$$\left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon\,.$$

5. Si assuma ora $\mu(X) < \infty$. Dopo aver enunciato il teorema di Egoroff ed utilizzando il punto 3, si provi che, se $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}_r$ converge q.o. a f, allora $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$ per ogni $p \in [1, q[$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Poiché $|f_k| \to |f|$ q.o., sfruttando l'identificazione di $L^q(\mu)$ con $L^q(\overline{\mu})$, con $\overline{\mu}$ completamento di μ, ed utilizzando il lemma di Fatou si ottiene

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_X \liminf_k |f_k|^q \, d\mu \leqslant \liminf_k \int_X |f|^q \, d\mu \leqslant r^q \,,$$

da cui la conclusione.

3. Procedendo come nella dimostrazione dell'inclusione di L^q in L^p in spazi di misura finita, si ottiene

$$\int_E |f|^p \, d\mu = \int_E |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leqslant \left(\int_E |f|^q \, d\mu \right)^{p/q} \left(\int_E 1 \, d\mu \right)^{(q-p)/q} \,,$$

dove si sono sfruttati il fatto che $|f|^p \in L^{q/p}$, perché $f \in L^q$, e la disuguaglianza di Hölder. Si deduce che

$$\left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \mu(E)^{(q-p)/pq} \|f\|_q \leqslant \mu(E)^{(q-p)/pq} r \,,$$

e quindi $\alpha(p,q) = (q-p)/pq$.

4. Fissato $\varepsilon > 0$, bisogna prendere

$$\mu(E)^{(q-p)/pq} r < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(E) < \left(\frac{\varepsilon}{r} \right)^{pq/(q-p)} \,,$$

e quindi $\delta < (\varepsilon/r)^{pq/(q-p)}$.

5. Si omette l'enunciato del teorema di Egoroff. Dopo aver osservato che $f_k - f \in \overline{B}_{2r}$, fissato $\varepsilon > 0$, si prenda δ come al punto precedente in corrispondenza di $\overline{B}_{2r}$. Allora si trova un insieme misurabile E tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_k \rightrightarrows f$ in E^c, cosicché $f_k \to f$ in $L^p(E^c)$, essendo E^c si misura finita. Si deduce che

$$\int_X |f_k - f|^p \, d\mu = \int_E |f_k - f|^p \, d\mu + \int_{E^c} |f_k - f|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon^p + \int_{E^c} |f_k - f|^p \, d\mu \,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\limsup_{k \to +\infty} \|f_k - f\|_p \leqslant \varepsilon \,,$$

da cui la conclusione per l'arbiotrarietà di $\varepsilon > 0$.

Esercizio 3

Sia

$$F(x) = \arctan x \, \chi_{]-\infty,0[}(x) + (2-x) \, \chi_{[0,1[}(x) - \frac{1}{x} \, \chi_{[1,+\infty[}(x) \,.$$

1. Calcolare T_F, funzione variazione totale di F e provare che $F \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$.

2. Detta μ la misura di Radon-Stieltjes associata ad F, calcolarne le decomposizioni di Hahn, di L-R-N rispetto alla misura di Lebesgue e quella di Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

3. Trovare due funzioni A e B tali che μ^+ e μ^- siano le misure di Lebesgue-Stieltjes associate ad A e B, rispettivamente.

4. Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leqslant y \leqslant 2\big\}$. Calcolare $m \times \mu^+(D)$ e $m \times \mu^-(D)$, e dedurre poi $m \times |\mu|(D)$, dove $|\mu|$ è la misura variazione totale di μ.

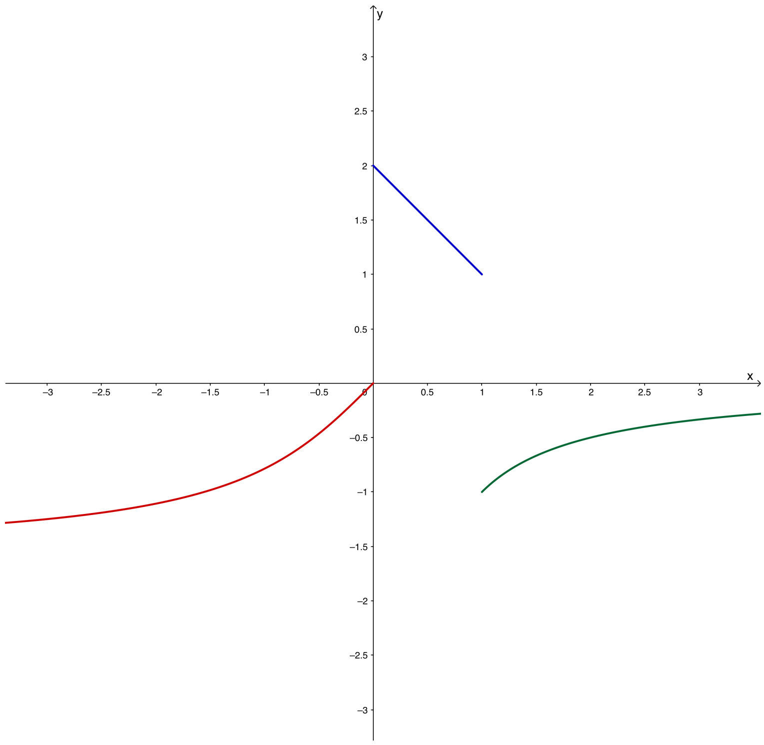

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

Svolgimento

Il grafico di F è riportato in figura 1 Si osservi che

- F è $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in $x = 0$ e $x = 1$;
- F è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $]1, +\infty[$;
- F è decrescente in $]0, 1]$.

1. Sfruttando le osservazioni fatte sopra, si trova

$$T_F(x) = \begin{cases} \arctan x + \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad x < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2 + x & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1\,, \\ \dfrac{\pi}{2} + 6 - \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

   Poiché

$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\, F = \lim_{x \to +\infty} T_F(x) = \frac{\pi}{2} + 6 < +\infty\,,$$

   F risulta essere a variazione totale limitata.

2. Sfruttando gli intervalli di crescenza e decrescenza di F si trova che una decomposizione di Hahn è

$$P =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\,, \qquad N =]0, 1]\,.$$

   Sfruttando la regolarità di F si trova

$$d\mu = \left(\frac{1}{1+x^2}\, \chi_{]-\infty,0[}(x) - \chi_{]0,1[}(x) + \frac{1}{x^2}\, \chi_{]1,+\infty[}(x) \right) dm + 2\delta_0 - 2\delta_1\,,$$

che dà la decomposizione L-R-N cercata, dove

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\,\chi_{]-\infty,0[}(x) - \chi_{]0,1[}(x) + \frac{1}{x^2}\,\chi_{]1,+\infty[}(x)\right) dm\,, \qquad 2\delta_0 - 2\delta_1$$

sono, rispettivamente, la parte assolutamente continua e la parte singolare rispetto alla misura di Lebesgue. Sfruttando questab decomposizione e quella di Hahn, si trova che la decomposizione di Jordan è data da

$$d\mu^+ = \left(\frac{1}{1+x^2}\,\chi_{]-\infty,0[}(x) + \frac{1}{x^2}\,\chi_{]1,+\infty[}(x)\right) dm + 2\delta_0\,, \qquad d\mu^- = \chi_{]0,1[}(x)\,dm + 2\delta_1\,.$$

3. Si ha

$$A(x) = \frac{1}{2}\big(T_F(x) + F(x)\big) = \begin{cases} \arctan x + \dfrac{\pi}{4} & \text{se} \quad x < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{4} + 2 & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1\,, \\ \dfrac{\pi}{4} + 3 - \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

$$B(x) = \frac{1}{2}\big(T_F(x) - F(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{se} \quad x < 0\,, \\ \dfrac{\pi}{4} + x & \text{se} \quad 0 \leqslant x < 1\,, \\ \dfrac{\pi}{4} + 3 & \text{se} \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

4. Essendo tutte le misure coinvolte finite o σ-finite, è possibile applicare il teorema di Tonelli e scrivere

$$m \times \mu^+(D) = \int_{\mathbb{R}} m(D^y)\,d\mu^+(y)\,, \qquad m \times \mu^-(D) = \int_{\mathbb{R}} m(D^y)\,d\mu^-(y)\,,$$

mentre si avrà

$$m \times |\mu|(D) = m \times \mu^+(D) + m \times \mu^-(D)\,.$$

Poiché

$$D^y = \begin{cases}]-1, y] & \text{se} \quad -1 < y \leqslant 2\,, \\ \varnothing & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} m \times \mu^+(D) &= \int_{]-1,2]} (y+1)\,d\mu^+(y) = \int_{-1}^{0} \frac{y+1}{1+y^2}\,dy + \int_1^2 \frac{y+1}{y^2}\,dy + 2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_{-1}^{0} + \arctan y\Big|_{-1}^{0} + 2 = \frac{\pi}{4} + 2 - \frac{1}{2}\ln 2\,, \\ m \times \mu^-(D) &= \int_{]-1,2]} (y+1)\,d\mu^-(y) = \int_0^1 (y+1)\,dy + 4 \\ &= \frac{1}{2}(y+1)^2\Big|_0^1 + 4 = \frac{11}{2}\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$m \times |\mu|(D) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{15}{2}\,.$$

È possibile procere anche invertendo l'ordine di integrazione, cioè sfruttando

$$m \times \mu^+(D) = \int_{\mathbb{R}} \mu^+(D_x)\,dm(x)\,, \qquad m \times \mu^-(D) = \int_{\mathbb{R}} \mu^-(D_x)\,dm(x)\,,$$

dove

$$D_x = \begin{cases} [x,2] & \text{se} \quad -1 < x \leqslant 2\,, \\ \varnothing & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sfruttando quanto trovato al punto 3, si ha

$$\mu^+(D_x) = A(2) - A(x-) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} - \arctan x & \text{se} \quad -1 < x \leqslant 0\,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1\,, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 2\,, \end{cases}$$

$$\mu^-(D_x) = B(2) - B(x-) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad -1 < x \leqslant 0\,, \\ 3 - x & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x \leqslant 2\,, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$m \times \mu^+(D) = \frac{5}{2} - \int_{-1}^{0} \arctan x \, dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx\,, \qquad m \times \mu^-(D) = 6 - \int_0^1 x\, dx\,.$$