Analisi Reale - a.a. 2020/2021

Soluzione del compito dell'8/2/2021

Esercizio 1

Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e si denoti con S l'insieme delle misure con segno definite sulla σ-algebra $\mathcal{M}$. Si introduca in S un ordine parziale definito da

$$\mu \lesssim \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(E) \leqslant \eta(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}\,.$$

1. Data $\mu \in S$, sia λ una misura positiva definita su $\mathcal{M}$, tale che $|\mu(E)| \leqslant \lambda(E)$ per ogni $E \in \mathcal{M}$. Provare che $|\mu| \lesssim \lambda$, dove $|\mu|$ è la misura variazione totale di μ.

Siano ora $\mu, \nu \in S$ finite.

2. Provare che esiste una misura ρ definita su $\mathcal{M}$, positiva e finita, e funzioni $f, g \in L^1(\rho)$ tali che $d\mu = f d\rho$, $d\nu = g d\rho$.

3. Provare che la misura con segno $\mu \vee \nu$ definita da

$$\mu \vee \nu(E) = \int_E \max\{f, g\}\, d\rho \quad \forall E \in \mathcal{M}\,,$$

soddisfa $\mu \vee \nu \lesssim \lambda$ per ogni $\lambda \in S$ tale che $\mu \lesssim \lambda$ e $\nu \lesssim \lambda$.

4. Provare che sono equivalenti

$$\text{(a) } \mu \perp \nu\,; \qquad \text{(b) } |\mu| \perp |\nu|\,; \qquad \text{(c) } |\mu + \nu| = |\mu| \vee |\nu|\,.$$

5. Provare che $\mu \vee \nu(E) = \sup\big\{\mu(A) + \nu(E \backslash A) : A \subseteq E\,,\ A \in \mathcal{M}\big\}$, $E \in \mathcal{M}$.

Svolgimento

1. Sia (P, N) una decomposizione di Hahn di μ. Allora, fissato $E \in \mathcal{M}$, si ha

$$|\mu|(E) = \mu(P \cap E) - \mu(N \cap E) \leqslant \lambda(P \cap E) + \lambda(N \cap E) = \lambda(E)\,,$$

come si voleva.

2. Sia $\rho = |\mu| + |\nu|$. Allora, se $\rho(E) = 0$, si deduce facilmente che $\mu(E) = \nu(E) = 0$, e quindi $\mu \ll \rho$ e $\nu \ll \rho$, da cui l'esistenza delle funzioni f e g, grazie al teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym.

3. Con ovvio significato dei simboli, si ha

$$\mu \vee \nu(E) = \int_{E \cap \{f \leqslant g\}} g\, d\rho + \int_{E \cap \{f > g\}} f\, d\rho = \nu\big(E \cap \{f \leqslant g\}\big) + \mu\big(E \cap \{f > g\}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\big(E \cap \{f \leqslant g\}\big) + \lambda\big(E \cap \{f > g\}\big) = \lambda(E)\,.$$

4. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)** Siano E nullo per μ e F nullo per ν. Sia (P, N) una decomposizione di Hahn per μ. Allora

$$|\mu|(E) = \mu(E \cap P) - \mu(E \cap N) = 0\,,$$

e, analogamente, $|\nu|(F) = 0$, da cui $|\mu| \perp |\nu|$.

(b) $\Longrightarrow$ **(c)** Siano f e g come sopra, cosicché $|\mu| = |f|\, d\rho$ e $|\nu| = |g|\, d\rho$. Siano $A, B \in \mathcal{M}$ disgiunti tali che $A \cup B = X$, A nullo per $|\mu|$ e B nullo per $|\nu|$. Allora

$$0 = |\mu|(A) = \int_A |f|\, d\rho\,, \qquad 0 = |\nu|(B) = \int_B |g|\, d\rho\,,$$

cosicché $f = 0$ ρ-q.o. in A e $g = 0$ ρ-q.o. in B. Si deduce che

$$|\mu| \vee |\nu|(E) = \int_E \max\big\{|f|, |g|\big\}\, d\rho = \int_{E\cap A} |g|\, d\rho + \int_{E\cap B} |f|\, d\rho = \int_E |g|\, d\rho + \int_E |f|\, d\rho\,,$$

e quindi

$$\max\big\{|f|, |g|\big\} = |f| + |g|$$

ρ-quasi ovunque. Ma questo è vero se e solo se

$$\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\} \cap \big\{x \in X : g(x) \neq 0\big\} \tag{1}$$

ha misura nulla per ρ, da cui

$$\max\big\{|f|, |g|\big\} = |f + g| \qquad \rho\text{-quasi ovunque} \tag{2}$$

e quindi la conclusione.

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** Poiché

$$|\mu + \nu|(E) = \int_E |f + g|\, d\rho = \int_E \max\big\{|f|, |g|\big\}\, d\rho = |\mu| \vee |\nu|(E)\,,$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$, allora vale (2), e quindi l'insieme (1) ha ancora ρ-misura nulla. Ne consegue che gli insiemi

$$\big\{x \in X : f(x) = 0\big\} \backslash \big\{x \in X : g(x) = 0\big\}\,, \qquad \big\{x \in X : g(x) = 0\big\}$$

sono disgiunti e la loro unione è X. Inoltre, il primo è nullo per μ ed il secondo per ν, e quindi $\mu \perp \nu$, come si voleva.

5. Siano $E \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{M}$. Allora

$$\mu(A) + \nu(E\backslash A) \leqslant \mu \vee \nu(A) + \mu \vee \nu(E\backslash A) = \mu \vee \nu(E)\,,$$

da cui

$$\mu \vee \nu(E) \geqslant \sup\big\{\mu(A) + \nu(E\backslash A) : A \subseteq E\,,\ A \in \mathcal{M}\big\}$$

D'altra parte, preso

$$A = E \cap \big\{x \in X : f(x) \geqslant g(x)\big\}\,,$$

si ha

$$\mu(A) + \nu(E\backslash A) = \int_A f\, d\rho + \int_{E\backslash A} g\, d\rho = \int_A \max\big\{f, g\big\}\, d\rho + \int_{E\backslash A} \max\big\{f, g\big\}\, d\rho = \mu \vee \nu(E)\,,$$

da cui la conclusione.

Esercizio 2

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura.

1. Si enunci e dimostri il teorema sulla disuguaglianza di Hólder.
2. Si provi che, se $\psi \in L^r(\mu)$ e $\varphi \in L^\infty(\mu)$, allora $\psi\varphi \in L^r(\mu)$, dove $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Si assuma che μ sia σ-finita e che $1 < p, q < \infty$ siano esponenti coniugati. Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^q(\mu)$, con $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in L^q.

3. Si provi che, se $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$, allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\mu)$.
4. Si provi che, se $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ e $g_n \rightharpoonup g$ in $L^q(\mu)$, allora $f_n g_n \rightharpoonup fg$ in $L^1(\mu)$.
5. Si provi che, se $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\mu)$ e $g_n \rightharpoonup g$ in $L^q(\mu)$, allora, in generale, $f_n g_n \not\rightharpoonup fg$ in $L^1(\mu)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Se $r = \infty$, si ha
$$|\psi\varphi(x)| \leqslant \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_\infty$$
per q.o. $x \in X$, e quindi $\psi\varphi \in L^\infty(\mu)$. Se $r < \infty$,
$$\int_X |\psi\varphi|^r \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty^r \int_X |\psi|^r \, d\mu < +\infty \, ,$$
da cui $|\psi\varphi| \in L^r(\mu)$.

3. Dobbiamo dimostrare che
$$\lim_n \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu$$
per ogni fissata $g \in L^q(\mu)$. Grazie alla disuguaglianza di Hölder, si trova
$$\left| \int_X f_n g \, d\mu - \int_X f g \, d\mu \right| \leqslant \int_X \big|(f_n - f)g\big| \, d\mu \leqslant \|g\|_q \|f_n - f\|_p \, ,$$
da cui la conclusione, perché $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. Dobbiamo dimostrare che
$$\lim_n \int_X f_n g_n \varphi \, d\mu = \int_X f g \varphi \, d\mu$$
per ogni fissata $\varphi \in L^\infty(\mu)$. Essendo $\|g_n\|_q \leqslant C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualche $C > 0$, procedendo come al punto 2 si trova $\|g_n\varphi\|_q \leqslant C\|\varphi\|_\infty$. Osservato che $f\varphi \in L^p(\mu)$, sempre grazie al punto 2, si ha
$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n g_n \varphi \, d\mu - \int_X f g \varphi \, d\mu \right| &\leqslant \int_X \big|(f_n - f) g_n \varphi\big| \, d\mu + \left| \int_X (g_n - g) f \varphi \, d\mu \right| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_p \|g_n \varphi\|_q + \left| \int_X (g_n - g) f \varphi \, d\mu \right| \\ &\leqslant C\|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_p + \left| \int_X (g_n - g) f \varphi \, d\mu \right| \to 0 \, , \end{aligned}$$
perché $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ e $g_n \rightharpoonup g$ in $L^q(\mu)$.

5. Si consideri $X = [0,1]$ con la misura di Lebesgue e siano $f_n(x) = g_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, $x \in [0,1]$. Allora $f_n, g_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,1)$, ma $f_n g_n \rightharpoonup 1/2$ in $L^2(0,1)$ perché la media di sen^2 in un intervallo periodo è $1/2$.

Esercizio 3

Sia
$$F(x) = \arctan(x+2) \, \chi_{]-\infty,-2[}(x) + 2\chi_{[-2,2[}(x) + e^{-3(x-2)} \, \chi_{[2,+\infty[}(x) \, .$$

1. Calcolare T_F, funzione variazione totale di F, e provare che $F \in \mathrm{BV}$.

2. Detta μ la misura di Lebesgue-Stieltjes con segno associata ad F, sia
$$\varphi(t,x) = \frac{e^{tx}}{x} \, , \qquad x \neq 0 \, .$$
Trovare l'insieme $D = \big\{ t \in \mathbb{R} : \varphi(t,\cdot) \in L^1(|\mu|) \big\}$.

3. Sia ora $f(t) \doteq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x) \, d|\mu|(x)$, $t \in D$. Provare che f è derivabile in D.

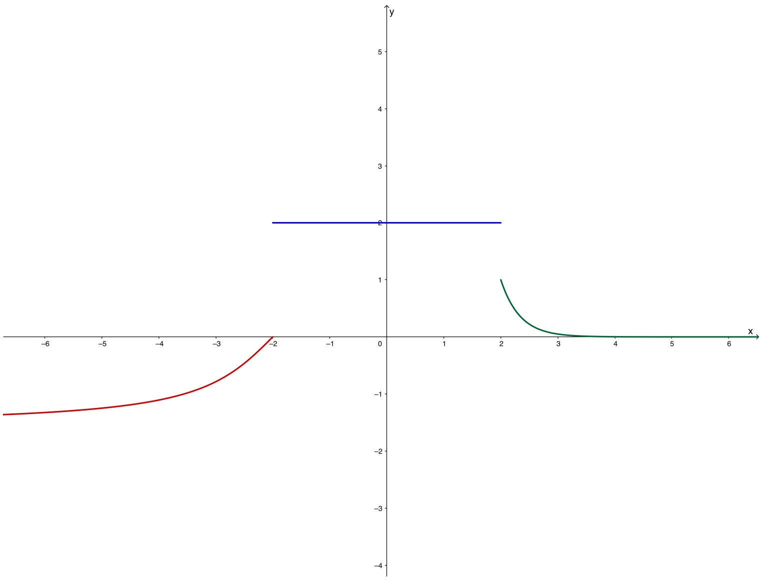

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

Svolgimento

Il grafico di F è riportato in figura 1. Si osservi che

- F è $\mathcal{C}^1$ a tratti con punti di salto in $x = -2$ e $x = 2$;
- F è crescente in $]-\infty, -2[$;
- F è decrescente in $]2, +\infty$;
- F è costante in $]-2, 2[$.

1. Sfruttando le osservazioni fatte sopra, si trova

$$T_F(x) = \begin{cases} \arctan(x+2) + \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad x < -2\,, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2 & \text{se} \quad -2 \leqslant x < 2\,, \\ \dfrac{\pi}{2} + 4 - e^{-3(x-2)} & \text{se} \quad x \geqslant 2\,. \end{cases}$$

   Poiché
$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\, F = \lim_{x \to +\infty} T_F(x) = \frac{\pi}{2} + 4 < +\infty\,,$$
   F risulta essere a variazione totale limitata.

2. Sempre sfruttando le osservazioni preliminari, si trova
$$d\mu = \left(\frac{1}{1+(x+2)^2} \chi_{]-\infty,-2[}(x) - 3e^{-3(x-2)} \chi_{]2,+\infty[}(x) \right) dm + 2\delta_{-2} - \delta_2\,,$$
   dove m è la misura di Lebesgue, da cui si ricava
$$d|\mu| = \left(\frac{1}{1+(x+2)^2} \chi_{]-\infty,-2[}(x) + 3e^{-3(x-2)} \chi_{]2,+\infty[}(x) \right) dm + 2\delta_{-2} + \delta_2\,.$$
   Allora
$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t,x)|\, d|\mu|(x) = \int_{-\infty}^{-2} \frac{e^{tx}}{|x|(1+(x+2)^2)}\, dx + 3 \int_2^{+\infty} \frac{e^{tx}}{x} e^{-3(x-2)}\, dx + 2\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{2}\,.$$

Il primo integrale è finito se e solo se $t \geqslant 0$, mentre il secondo lo è se e solo se $t - 3 < 0$, cio'e se e solo se $t < 3$ (si noti che per $t = 3$ la funzione integranda è e^6/x, che ha integrale infinito nell'intervallo $]2, +\infty[$). Allora $D = [0, 3[$.

3. Si noti che $\partial_t \varphi(t,x) = e^{tx}$. Fissato $\varepsilon > 0$, si trova che, se $t \in [0, 3-\varepsilon]$,

$$|\partial_t(t,x)| \leqslant g_\varepsilon(x)\,, \qquad \text{dove} \qquad g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leqslant 0\,, \\ e^{(3-\varepsilon)x} & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, d|\mu|(x) = \int_{-\infty} -2\frac{1 + (x+2)^2}{} dx + 3e^6 \int_2^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\, dx + 2 + e^{2(3-\varepsilon)} < +\infty\,,$$

si ha $g_\varepsilon \in L^1(|\mu|)$. Per il teorema di derivazione degli integrali dipendenti da parametro, si trova che f è derivabile in $[0, 3-\varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$, e quindi in D, grazie all'arbitrarietà di ε.