

Soluzione del compito del 24/1/2022

Esercizio 1

1. Si diano le definizioni di misura esterna e di insieme misurabile per una misura esterna e si enunci il teorema di Caratheodory.

Siano X insieme non vuoto, $\{\mu_n^*\}_{n \geq 1}$ successione di misure esterne su X e $\mathcal{M}_n$ la σ -algebra degli insiemi μ_n^* -misurabili.

2. Provare che $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita da $\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^*(E)$ è misura esterna su X .
3. Provare che $\mathcal{M} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{M}_n$ è una σ -algebra di insiemi μ^* -misurabili.
4. Siano ora $\mu_n = \mu_n^*|_{\mathcal{M}_n}$ e $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$. Provare che $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)$, $E \in \mathcal{M}$, è una misura.
5. Provare che, se $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ è $\mathcal{M}$ -misurabile, allora $\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g d\mu_n$.
6. Dedurre che $g \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, se e solo se $g \in L^p(\mu_n)$ per ogni $n \geq 1$ e vale $\sum_{n=1}^{\infty} \|g\|_{L^p(\mu_n)}^p < +\infty$.
7. Provare che $g \in L^\infty(\mu)$ se e solo se $g \in L^\infty(\mu_n)$ per ogni $n \geq 1$ e $\sup_{n \geq 1} \|g\|_{L^\infty(\mu_n)} < +\infty$.
8. Trovare un esempio di successione $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ e funzione g tali che $g \in L^\infty(\mu_n)$ per ogni $n \geq 1$, ma $g \notin L^\infty(\mu)$.
9. Sia ora $\{g_k\}_{k \geq 1} \subseteq L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, tale che $g_k \rightarrow g$ in $L^p(\mu_n)$ per ogni n e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)} < +\infty.$$

Provare che $g_k \rightarrow g$ in $L^p(\mu)$ (si ricordi che $\rightarrow$ indica la convergenza debole).

10. Provare che la stessa conclusione del punto precedente vale per $p = 1$, supponendo μ σ -finita.

Svolgimento

1. Omesso.
2. Si omette: semplicemente si sfrutta il fatto che μ_n^* è misura esterna per ogni n .
3. Si omette: $\mathcal{M}$ è σ -algebra perché intersezione di σ -algebre e poi si sfrutta la definizione di insieme misurabile per una misura esterna.
4. Si omette perché è una diretta conseguenza del teorema di Caratheodory.
5. Se $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{M}$, si conclude sfruttando i punti 3 e 4. Se g è funzione semplice non negativa, è una conseguenza della linearità dell'integrale. Sia ora $g \in L^+(X)$ e fissiamo $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ successione crescente di funzioni semplici non negative puntualmente convergente a g . Allora, grazie al teorema di Beppo-Levi si ha

$$\int_X g d\mu = \lim_k \int_X \varphi_k d\mu = \lim_k \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X \varphi_k d\mu_n.$$

Osservato che per ogni $n \geq 1$ la successione

$$\left\{ \int_X \varphi_k d\mu_n \right\}_{k \geq 1}$$

è crescente, essendo tale $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$, utilizzando nuovamente due volte il teorema di Beppo-Levi, si ottiene

$$\int_X g d\mu = \lim_k \int_X \varphi_k d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_k \int_X \varphi_k d\mu_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X g d\mu_n,$$

come si voleva.

6. Poiché, grazie al punto precedente,

$$\|g\|_{L^p(\mu)}^p = \int_X |g|^p d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |g|^p d\mu_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \|g\|_{L^p(\mu_n)}^p,$$

si conclude facilmente.

7. Si ha che $g \in L^\infty(\mu)$ se e solo se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0,$$

cioè, sfruttando la definizione di μ , se e solo se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0,$$

e quindi se e solo se esiste $\alpha > 0$ tale che $\mu_n(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0$ per ogni $n \geq 1$, il che equivale a dire che $g \in L^\infty(\mu_n)$ per ogni $n \geq 1$ e $\sup_n \|g\|_{L^\infty(\mu_n)} \leq \alpha < +\infty$.

8. È sufficiente prendere $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $\mu_n = \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $\|g\|_{L^\infty(\delta_n)} = n$ e $g \notin L^\infty(\mu)$ perché

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n$$

e, fissato $\alpha > 0$, si ha

$$\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > \alpha\} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq [\alpha] + 1\},$$

dove $[\cdot]$ indica la parte intera, da cui

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > \alpha\}) = +\infty.$$

9. Innanzitutto, si osservi che $g \in L^p(\mu)$. Infatti, sia q esponente coniugato di p e si fissino $f \in L^q(\mu_n)$, con $\|f\|_{L^q(\mu_n)} \leq 1$, e $\varepsilon > 0$. Troviamo k tale che

$$\left| \int_X g f d\mu_n \right| \leq \left| \int_X g_k f d\mu_n \right| + \left| \int_X (g - g_k) f d\mu_n \right| \leq \|g_k\|_{L^p(\mu_n)} \|f\|_{L^q(\mu_n)} + \varepsilon \leq \|g_k\|_{L^p(\mu_n)} + \varepsilon,$$

dove si è sfruttata la disuguaglianza di Hölder. Grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si ottiene che

$$\left| \int_X g f d\mu_n \right| \leq \sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)},$$

da cui $\|g\|_{L^p(\mu_n)} \leq \sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)}$. Allora, fissato $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)} \leq 1 \quad \forall n > N,$$

si ottiene

$$\|g\|_{L^p(\mu)}^p = \sum_{n=1}^{+\infty} \|g\|_{L^p(\mu_n)}^p \leq \sum_{n=1}^N \left(\sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)} \right)^p + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)}^p < +\infty.$$

Proviamo ora che $g_k \rightarrow g$ in $L^p(\mu)$. Fissata $f \in L^q(\mu)$ si ha

$$\lim_k \int_X g_k f d\mu = \lim_k \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X g_k f d\mu_n. \quad (1)$$

Osservato che $f \in L^q(\mu_n)$ per ogni n e che $\{\|f\|_{L^q(\mu_n)}\}_{n \geq 1}$ è limitata, poiché

$$\lim_k \int_X g_k f d\mu_n = \int_X g f d\mu_n \quad \forall n \geq 1,$$

e, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$\left| \int_X g_k f d\mu_n \right| \leq \|f\|_{L^q(\mu_n)} \sup_k \|g_k\|_{L^p(\mu_n)},$$

è possibile passare al limite per convergenza dominata in (1) e ottenere

$$\lim_k \int_X g_k f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X g f d\mu_n = \int_X g f d\mu$$

e quindi la convergenza debole di $\{g_k\}_{k \geq 1}$ a g in $L^p(\mu)$.

10. Essendo μ misura σ -finita, il duale topologico di $L^1(\mu)$ è isometricamente isomorfo a $L^\infty(\mu)$. Inoltre, la stessa proprietà vale per le misure μ_n , essendo anche queste σ -finite, perché, se $\mu(A) < +\infty$, anche $\mu_n(A) < +\infty$ per ogni n . Allora è possibile procedere come al punto precedente, tenendo presente che, se $f \in L^\infty(\mu)$, allora $\sup_n \|f\|_{L^\infty(\mu_n)} < +\infty$.

Esercizio 2

1. Si enunci e dimostri il teorema di continuità e derivabilità degli integrali dipendenti da parametro.

Sia ora

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt & \text{se } x > 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \\ \frac{e^{-1/x^2}}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

2. Provare che $F \in \text{NBV}$.
3. Sia μ la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F e $|\mu|$ la sua variazione totale. Dato lo spazio con misura $(]0, +\infty[\times]1, +\infty[, \mathcal{B}, m \times |\mu|)$, dove $\mathcal{B}$ è la σ -algebra dei boreliani, provare che la funzione definita da

$$f_r(x, y) = \frac{|x|^r |y|^{-r}}{x^4 + (\sin y + 2)^2}, \quad x > 0, y > 1,$$

è integrabile per $-1 < r < 3$.

4. Sia ora

$$\varphi(r) = \int_{]0, +\infty[\times]1, +\infty[} f_r(x, y) d(m \times |\mu|)(x, y), \quad r \in]-1, 3[.$$

Provare che $\varphi \in \mathcal{C}^1(]-1, 3[)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Si osservi che $F \in C^1(]-\infty, 0])$ e $F \in C^1([0, +\infty[)$. Inoltre, grazie al teorema di De L'Hopital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

e quindi F è continua a destra, e, banalmente, $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$. Per dimostrare che F è a variazione totale limitata, e quindi NBV, non resta che provare che

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{2-x^2}{x^4} e^{-1/x^2} & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{x^2} \left(\sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Poiché $F'(x) \sim 1/x^2$ per $x \rightarrow -\infty$ e $F(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$, si ha $F' \in L^1(-\infty, 0)$. Inoltre, $|F'(x)| \leq C/x^2$ definitivamente per $x \rightarrow +\infty$ per qualche costante $C > 0$, ed essendo

$$\sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \sim x^3 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

si ha $F'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$, da cui $F' \in L^1(0, +\infty)$ e quindi la conclusione.

3. Si ha

$$d\mu = F'(x) dx + \delta_0 = \left[\frac{2-x^2}{x^4} e^{-1/x^2} \chi_{]-\infty, 0[}(x) + \frac{1}{x^2} \left(\sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) \chi_{[0, +\infty[}(x) \right] dx + \delta_0,$$

da cui

$$d|\mu| = \left[\frac{|2-x^2|}{x^4} e^{-1/x^2} \chi_{]-\infty, 0[}(x) + \frac{1}{x^2} \left| \sin x - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right| \chi_{[0, +\infty[}(x) \right] dx + \delta_0, \quad (2)$$

Si osservi che

$$f_r(x, y) \leq \frac{|x|^r |y|^{-r}}{x^4 + 1}.$$

Se dimostriamo che

$$\int_{[0, +\infty[\times]1, +\infty[} \frac{|x|^r |y|^{-r}}{x^4 + 1} d(m \times |\mu|)(x, y) < +\infty$$

per ogni $r \in]-1, 3[$, abbiamo concluso. Grazie al teorema di Tonelli si ha

$$\int_{[0, +\infty[\times]1, +\infty[} \frac{|x|^r |y|^{-r}}{x^4 + 1} d(m \times |\mu|)(x, y) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{|x|^r}{x^4 + 1} dx \right) \left(\int_{[1, +\infty[} |y|^{-r} d|\mu|(y) \right)$$

Si osservi che

$$\frac{|x|^r}{x^4 + 1} \sim x^r \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \quad \frac{x^r}{x^4 + 1} \sim 1/|x|^{4-r} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

e quindi il primo integrale è finito se e solo se $4 - r > 1$ e $r > -1$, cioè per $-1 < r < 3$. Quanto al secondo, grazie a (2), si ha

$$\int_{[1, +\infty[} |y|^{-r} d|\mu|(y) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2+r}} \left| \sin y - \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt \right| dy,$$

che è finito non appena $2 + r > 1$, cioè $r > -1$, essendo

$$y \rightarrow \left| \sin y - \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt \right| \quad (3)$$

funzione limitata, e si conclude.

4. Si noti che f_r è derivabile rispetto ad r e vale

$$\partial_r f_r(x, y) = x^r y^{-r} \frac{\ln x - \ln y}{x^4 + (\sin y + 2)^2}.$$

Se dimostriamo che $\varphi \in C^1([-1 + \varepsilon, 3 - \varepsilon])$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$, abbiamo concluso. Per farlo, osserviamo che, se $r \in [-1 + \varepsilon, 3 - \varepsilon]$, vale

$$|\partial_r f_r(x, y)| \leq |\psi(x, y)| \doteq \begin{cases} x^{-1+\varepsilon} y^{-1+\varepsilon} \frac{|\ln x| + \ln y}{x^4 + 1} & \text{se } 0 < x \leq 1, y > 1, \\ x^{3-\varepsilon} y^{-1+\varepsilon} \frac{|\ln x| + \ln y}{x^4 + 1} & \text{se } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Grazie al teorema di Tonelli e sfruttando (2), si ha

$$\begin{aligned} & \int_{]0, +\infty[\times]1, +\infty[} \psi(x, y) d(m \times |\mu|)(x, y) = \\ & = \left(\int_0^1 x^{-1+\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} dx + \int_1^{+\infty} x^{3-\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} dx \right) \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{1+\varepsilon}} \left| \sin y - \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt \right| dy \right) + \\ & + \left(\int_0^1 x^{-1+\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} dx + \int_1^{+\infty} x^{3-\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} dx \right) \left(\int_1^{+\infty} \frac{\ln y}{y^{1+\varepsilon}} \left| \sin y - \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt \right| dy \right). \end{aligned}$$

Poiché

$$x^{-1+\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} \sim \frac{\ln x}{x^{1-\varepsilon}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \quad x^{3-\varepsilon} \frac{|\ln x|}{x^4 + 1} \sim \frac{\ln x}{x^{1+\varepsilon}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

e sfruttando la limitatezza della funzione (3), si deduce che $\psi \in L^1(m \times |\mu|)$, e quindi la conclusione, grazie al teorema di derivabilità degli integrali dipendenti da parametro.