Analisi Reale - a.a. 2021/2022

Soluzione del compito del 14/2/2022

Esercizio 1

Fissati $p \geqslant 0$ e $0 < \delta < 1$, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisca

$$H_{p,\delta}(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam} E_j\big)^p : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\,,\ \operatorname{diam} E_j \leqslant \delta \right\}.$$

1. Si provi che $H_{p,\delta}$ è misura esterna su $\mathbb{R}^n$.
2. Dato per assunto che i boreliani di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili per $H_{p,\delta}$ per ogni $0 < \delta < 1$, provare che il limite
$$\lim_{\delta \to 0^+} H_{p,\delta}(E)\,, \qquad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\,,$$
esiste e definisce una misura.
3. Dato $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, si provi che, se $H_p(E) < \infty$, allora $H_q(E) = 0$ per ogni $q > p$.
4. Fissati $p = n = 1$, si provi che esiste una costante $c > 0$ tale che $H_1 = c\,m$, con m misura di Lebesgue.

Svolgimento

1. Prendendo $E_j = \varnothing$ per ogni j, si verifica facilmente che $H_{p,\delta}(\varnothing) = 0$. Dati $A, B \subseteq X$, $A \subseteq B$, ogni ricoprimento $\{E_j\}_{j\geqslant 1}$ di B con insiemi di diametro al più δ è anche un ricoprimento di A, e quindi $H_{p,\delta}(A) \leqslant H_{p,\delta}(B)$. Resta da verificare la subadditività numerabile. Sia $\{A_k\}_{k\geqslant 1}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{P}(X)$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k \geqslant 1$ troviamo una famiglia $\{E_j^k\}_{j\geqslant 1}$ di sottoinsiemi di X tale che
$$\operatorname{diam} E_j^k \leqslant \delta \quad \forall j, k \geqslant 1\,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j^k)^p \leqslant H_{p,\delta}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$
Poiché $\{E_j^k\}_{j,k\geqslant 1}$ è un ricoprimento numerabile di $\bigcup_{k\geqslant 1} A_k$ con insiemi di diametro al più δ, si ha
$$\begin{aligned} H_{p,\delta}\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) &\leqslant \sum_{j,k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j^k)^p = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j^k)^p \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Big(H_{p,\delta}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} H_{p,\delta}(A_k) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$
e si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
2. Si noti che, fissati $E \subseteq X$ e $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$, si ha
$$\left\{\{E_j\}_{j\geqslant 1} : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\,,\ \operatorname{diam} E_j \leqslant \delta_1\right\} \subseteq \left\{\{E_j\}_{j\geqslant 1} : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\,,\ \operatorname{diam} E_j \leqslant \delta_2\right\},$$
da cui $H_{p,\delta_2}(E) \leqslant H_{p,\delta_1}(E)$, cioè la funzione $]0,1[\ni \delta \mapsto H_{p,\delta}(E)$ è monotona decrescente e quindi ha limite per $\delta \to 0^+$ e vale
$$H_p(E) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}(E) = \sup_{0<\delta<1} H_{p,\delta}(E)\,.$$

Dimostriamo che H_p è una misura. Che $H_p(\varnothing) = 0$ è banale, visto che $H_{p,\delta}(\varnothing) = 0$ per ogni δ. Sia ora $\{A_k\}_{k\geqslant 1}$ una famiglia di boreliani a due a due disgiunti. Poiché sono insiemi misurabili per $H_{p,\delta}$ per ogni δ, si ha

$$H_p\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) = \lim_{\delta\to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} H_{p,\delta}(A_k)\,. \tag{1}$$

Se

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_p(A_k) < +\infty\,,$$

poiché $H_{p,\delta}(A_k) \leqslant H_p(A_k)$ per ogni δ e per ogni k, è possibile passare al limite in (1) per convergenza dominata e ottenere la numerabile additività di H_p. Se invece

$$\sum_{k=1}^{\infty} H_p(A_k) = +\infty\,,$$

applicando il lemma di Fatou a (1) si ottiene

$$H_p\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) = \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}\Big(\bigcup_{k\geqslant 1} A_k\Big) = \lim_{\delta\to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} H_{p,\delta}(A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\delta\to 0^+} H_{p,\delta}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} H_p(A_k)\,,$$

da cui ancora la numerabile additività.

3. Sia $\{E_j\}_{j\geqslant 1}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che $\operatorname{diam} E_j < \delta < 1$ per ogni $j \geqslant 1$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j)^p \leqslant H_{p,\delta}(E) + 1\,.$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j)^q = \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j)^{q-p} (\operatorname{diam} E_j)^p < \delta^{q-p} \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_j)^p \leqslant \delta^{q-p}\big[H_{p,\delta}(E) + 1\big]\,,$$

da cui $H_q(E) = 0$, prendendo il limite per $\delta \to 0^+$.

4. Banalmente, H_1 è invariante per traslazioni, essendo tale il diametro di un insieme. Inoltre, fissati , $\delta, M > 0$, detto $E_j = [-M + (j-1)\delta, -M + j\delta]$, $j = 1, \ldots, [2M/\delta] + 1$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera, si ha

$$H_{1,\delta}([-M.M]) \leqslant \sum_{j=1}^{[2M/\delta]+1} \operatorname{diam} E_j = \sum_{j=1}^{[2M/\delta]+1} \delta \leqslant 2M + 1\,,$$

da cui $H_1([-M, M]) \leqslant 2M + 1$. Allora H_1 è una misura invariante per traslazioni e finita sui compatti, da cui la conclusione.

Esercizio 2

Siano p, q esponenti coniugati, $1 < p < \infty$.

1. Provare che, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, allora $f * \psi$ è funzione limitata e uniformemente continua.

Siano ora $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ successione limitata tale che $f_k \rightharpoonup f$ in L^p.

2. Provare che $(f_k * \psi)g \to (f * \psi)g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Provare che $f_k * g \rightharpoonup f * g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
4. Si provi che, se $\operatorname{supp}\psi, \operatorname{supp} f_k \subseteq B_M(0)$ per qualche $M > 0$ e per ogni k, allora $f * \psi, f_k * \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $f_k * \psi \to f * \psi$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Svolgimento

1. Omesso.

2. Si osservi che, poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $x \mapsto \psi(x-y)$ appartiene a $L^q(\mathbb{R}^n)$ grazie all'invarianza per traslazioni dell'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, poiché $f_k \rightharpoonup f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} f_k * \psi(x) &= \lim_{k\to+\infty} f_k * \psi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y)\psi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\,dy \\ &= f * \psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.\end{aligned}$$

Allora,

$$\lim_{k\to+\infty} f_k * \psi(x) g(x) = f * \psi(x) g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

ed inoltre

$$\big|f_k * \psi(x)g(x)\big| \leqslant \|f_k * \psi\|_\infty |g(x)| \leqslant \|f_k\|_p \|\psi\|_q |g(x)| \leqslant C\|\psi\|_q |g(x)|\,,$$

dove $C \geqslant \|f_k\|_p$ per ogni $k \geqslant 1$. Poiché $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si conclude per convergenza dominata.

3. Fissata $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k * g(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x-y)g(y)\,dy\right)\psi(x)\,dx\,.$$

Poiché, per il teorema di Tonelli,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f_k(x-y)g(y)\psi(x)\,dydx = \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| * |g|(x)|\psi(x)|\,dx < +\infty\,,$$

utilizzando il teorema di Fubini e ponendo $\tilde{f}_k(z) = f_k(-z)$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k * g(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x-y)\psi(x)\,dx\right)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_k * \psi(y)g(y)\,dy\,.$$

Adesso è possibile procedere per convergenza dominata come al punto precedente perché, banalmente, $\tilde{f}_k \rightharpoonup \tilde{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, dove $\tilde{f}(y) = f(-y)$.

4. Grazie alla proprietà della convoluzione, supp $f_k * \psi \subseteq \overline{B_{2M}(0)}$. Allora

$$\big|f_k * \psi(x)\big| \leqslant C\|\psi\|_q \chi_{\overline{B_{2M}(0)}}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

dove la costante C è scelta come sopra. Poiché $f_k * \psi(x) \to f * \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si conclude per convergenza dominata.

Esercizio 3

1. Si enunci e dimostri il teorema di convergenza dominata in L^p, con $1 < p < \infty$.

2. Confutare con un controesempio la validità dello stesso teorema in L^∞.

Sia ora

$$F(x) = \frac{x}{1+x^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x) + \chi_{[-1,0]}(x) + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\chi_{]0,\pi[}(x) + e^{-3x}\chi_{[3\pi,+\infty[}(x)\,.$$

3. Calcolare la funzione variazione totale di F e provare che F è funzione NBV.

4. Detta μ la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F, calcolare le decomposizioni di Hahn, di Lebesgue-Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue e di Jordan di μ.

5. Sia
$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt[4]{x}(x-2\pi)}\chi_{]0,+\infty[}(x)\,,$$
Trovare per quali $p \in [1,\infty]$ vale $f \in L^p(|\mu|)$.

6. Sia data la successione di funzioni $\{f_k\}_{k\geqslant 1}$ definita da
$$f_k(x) = k \operatorname{sen}\big(f(x)/k\big) + k\,\chi_{]\pi,3\pi[}(x)\,.$$
Trovare per quali $p \in [1,\infty]$ vale $f_k \to f$ in $L^p(|\mu|)$.

Svolgimento

1. *Enunciato.* Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ spazio con misura e $1 < p < \infty$. Data $\{f_k\}_{k\geqslant 1} \subseteq L^p(\mu)$ tale che $f_k \to f$ q.o. ed esiste $g \in L^p(\mu)$ tale che $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ q.o., allora $f \in L^p(\mu)$ e $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$.

   Dimostrazione. Si ha $|f_k(x)| \to |f(x)|$ q.o., e quindi $|f(x)| \leqslant g(x)$ q.o., da cui $f \in L^p(\mu)$. Inoltre $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ q.o. e
$$|f_k(x) - f(x)|^p \leqslant 2^p\big(|f_k(x)|^p + |f(x)|^p\big) \leqslant 2^p\big(|g(x)|^p + |f(x)|^p\big)\,,$$
   e quindi, per convergenza dominata,
$$\lim_k \int_X |f_k - f|^p\,d\mu = 0\,,$$
   da cui la convergenza di $\{f_k\}_{k\geqslant 1}$ a f in $L^p(\mu)$.

2. Basta prendere $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu = m$, $f_k = \chi_{[k,k+1]}$. Allora $f_k \to 0$ puntualmente, $|f_k(x)| \leqslant 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma la successione non tende a 0 in $L^\infty(m)$.

3. Si noti che F è funzione $\mathcal{C}^1$ a tratti, decrescente in $]-\infty,-1[$, in $]0,\pi[$ e in $[3\pi,+\infty[$, mentre è costante in $[-1,0]$ e in $[\pi,3\pi[$. Allora
$$T_F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x < -1\,,\\ 2 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0\,,\\ 3 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad 0 < x < \pi\,,\\ 3 & \text{se} \quad \pi \leqslant x < 3\pi\,,\\ 3 + 2e^{-9\pi} - e^{-3x} & \text{se} \quad x \geqslant 3\pi\,. \end{cases}$$
   Allora
$$\lim_{x\to infty} T_F(x) = 3 + 2e^{-9\pi}\,,$$
   e quindi F ha variazione totale limitata. Inoltre, poiché banalmente è funzione continua a destra e $F(x) \to 0$ per $x \to -\infty$, essa è funzione NBV.

4. Grazie alle proprietà di F si ha:

   (a) decomposizione di Hahn:
$$P = \{-1, 3\pi\}\,, \quad N =]-\infty,-1[\cup]-1,3\pi[\cup]3\pi,+\infty[\,;$$

   (b) decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym:
$$d\mu = \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x) + \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\chi_{]0,\pi[}(x) - 3e^{-3x}\chi_{[3\pi,+\infty[}(x)\right)dx + \\ + \frac{3}{2}\delta_{-1} + e^{-9\pi}\delta_{3\pi}\,;$$

(c) decomposizione di Jordan:

$$d\mu^+ = \frac{3}{2}\delta_{-1} + e^{-9\pi}\delta_{3\pi}\,,$$

$$d\mu^- = \left(\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\chi_{]-\infty,-1[}(x) + \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\chi_{]0,\pi[}(x) + 3e^{-3x}\chi_{[3\pi,+\infty[}(x)\right)\,dx\,.$$

5. Sia $1 \leqslant p < \infty$. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,d|\mu|(x) = \int_0^\pi \frac{e^{px}}{x^{p/4}(2\pi - x)^p}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\,dx + \\ + 3\int_{3\pi}^{+\infty} \frac{e^{(p-3)x}}{x^{p/4}(x-2\pi)^p}\,dx + \big[f(3\pi)\big]^p e^{-9\pi}\,.$$

Si noti che

$$\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2} \sim x \quad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi il primo integrale è finito se e solo se $p/4 - 1 < 1$, cioè se e solo se $1 \leqslant p < 8$. Per il secondo integrale si vede facilmente che è finito se e solo se $1 \leqslant p \leqslant 3$. Inoltre, $f \notin L^\infty(|\mu|)$ perché, se così fosse, essendo $|\mu|(\mathbb{R}) < +\infty$, si avrebbe $f \in L^p(|\mu|)$ per ogni p. Allora $f \in L^p(|\mu|)$ se e solo se $1 \leqslant p \leqslant 3$.

6. Osservato che $|\mu|(]\pi, 3\pi[) = 0$, si ha

$$f_k(x) \to f(x) \quad \text{e} \quad |f_k(x)| \leqslant |f(x)| \quad \text{per } |\mu|\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Allora è possibile concludere per convergenza dominata che $f_k \to f$ in $L^p(|\mu|)$ se e solo se $1 \leqslant p \leqslant 3$.