Analisi Reale - a.a. 2022/2023

Soluzione del compito del 23/1/2023

Esercizio 1

Siano $X \neq \emptyset$ un insieme, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ una misura esterna su X e $\mathcal{M}$ σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili.

1. Sia $A \in \mathcal{M}$. Provare che se $E \subseteq A$ e $F \subseteq X\setminus A$, allora $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$.
2. Dimostrare che, se $\{A_j\}_{j\geqslant 1} \subseteq \mathcal{M}$ è successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti e $E_j \subseteq A_j$ per ogni $j \geqslant 1$, allora $\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j)$.

Dato $E \subseteq X$, un elemento $\widetilde{E} \in \mathcal{M}$ si dice un ricoprimento misurabile di E se $E \subseteq \widetilde{E}$ e per ogni $B \in \mathcal{M}$, $B \subseteq \widetilde{E}\setminus E$, vale $\mu^*(B) = 0$.

3. Sia dato $E \subseteq X$ per cui esiste $E_0 \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq E_0$ e $\mu^*(E_0) < +\infty$ e sia $\mathcal{M}(E) = \big\{A \in \mathcal{M} : E \subseteq A\big\}$. Provare che esiste $\widetilde{E} \in \mathcal{M}(E)$ tale che $\mu^*(\widetilde{E}) = \min\big\{\mu^*(A) : A \in \mathcal{M}(E)\big\}$ e che $\widetilde{E}$ è un ricoprimento misurabile di E.

Siano ora $\mu^* = m^*$, misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}$, e N l'insieme di Vitali. Fissato $j \in \mathbb{N}$, si ponga $N(j) = N + j$ e $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} N(j)$.

4. Una volta dimostrato che $0 < m^*(N) \leqslant 1$, provare che esiste un ricoprimento misurabile di E.

Svolgimento

1. Poiché A è misurabile si ha

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*\big((E \cup F) \cap A\big) + \mu^*\big((E \cup F) \cap A^c\big) = \mu^*(E) + \mu^*(F)\,.$$

2. Dal punto precedente si ricava facilmente per induzione che

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j)\,.$$

   Per subadditività e monotonia di μ^* si ricava

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \geqslant \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j)\,,$$

   da cui la conclusione passando al limite per $n \to +\infty$.

3. Poiché $\mu^*(E_0) < +\infty$, si ha

$$I \doteq \inf\big\{\mu^*(A) : A \in \mathcal{M}(E)\big\} < +\infty\,.$$

   Fissato $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, sia $E_k \in \mathcal{M}(E)$ tale che

$$\mu^*(E_k) < I + 1/k\,,$$

e sia $\widetilde{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Allora, banalmente $E \subseteq \widetilde{E}$ e $\widetilde{E} \in \mathcal{M}$ perché $E_k \in \mathcal{M}$ per ogni k e $\mathcal{M}$ è σ-algebra, da cui $\widetilde{E} \in \mathcal{M}(E)$. Inoltre, per ogni $k \geqslant 1$ vale

$$I \leqslant \mu^*(\widetilde{E}) \leqslant \mu^*(E_k) < I + 1/k \,,$$

da cui la conclusione. Sia ora $B \in \mathcal{M}$, $B \subseteq \widetilde{E} \backslash E$. Se fosse $\mu^*(B) > 0$, osservato che $E \subseteq \widetilde{E} \backslash B \in \mathcal{M}$ e che $\mu^*\big|_{\mathcal{M}}$ è misura, si avrebbe

$$\mu^*(\widetilde{E} \backslash B) = \mu^*(\widetilde{E}) - \mu^*(B) = I - \mu^*(B) < I \,,$$

assurdo. Dunque $\widetilde{E}$ è un ricoprimento misurabile di E.

4. Essendo $N \subseteq [0,1[$, per monotonia si ha $m^*(N) \leqslant m^*([0,1[) = 1$. Fissato $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, sia

$$N_r = \big\{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r[\big\} \cup \big\{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1[\big\}$$

l'insieme costruito a lezione. Per subadditività si ha

$$1 = m^*([0,1[) = m^*\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} N_r\Big) \leqslant \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m^*(N_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1[} m^*(N) \,.$$

Se fosse $m^*(N) = 0$, si otterrebbe un assurdo. Dunque $0 < m^*(N) \leqslant 1$. Sia ora $\widetilde{N(j)}$ un ricoprimento misurabile di $N(j)$, che esiste perché $m^*(N(j)) = m^*(N) \leqslant 1$. Si ponga

$$\widetilde{E} = \bigcup_{j=1}^{k} \widetilde{N(j)} \,,$$

Si ha $\widetilde{E} \in \mathcal{M}$, perché $\widetilde{N}(j) \in \mathcal{M}$ per ogni j, e

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} N(j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{N(j} \,.$$

Sia $B \subseteq \widetilde{E} \backslash E$. Posto $B_j = B \cap \widetilde{N(j)}$, si ha $B_j \in \mathcal{M}$ e $B_j \subseteq \widetilde{N(j)} \backslash N(j)$, da cui $m^*(B_j) = 0$, e quindi

$$m^*(B) = \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B_j) = 0 \,.$$

Allora $\widetilde{E}$ è ricoprimento misurabile di E.

Esercizio 2

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura.

1. Provare che, se $f \in L^1(\mu)$, allora $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_{\{|f| > t\}} |f| \, d\mu = 0$.
2. Provare che, data $\{f_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ per cui esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che $|f_k| \leqslant g$ q.o. e per ogni k, allora $\{f_k\}_{k \geqslant 1}$ è uniformemente integrabile, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che $\displaystyle\int_{\{|f_k| > t\}} |f_k| \, d\mu < \varepsilon$ per ogni $k \geqslant 1$ e per ogni $t > t_\varepsilon$.
3. Provare che, se $\{f_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ è uniformemente integrabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, dato $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \delta_\varepsilon$, si ha $\displaystyle\int_E |f_k| \, d\mu < \varepsilon$ per ogni $k \geqslant 1$.
4. Dimostrare che, se $\{f_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ converge a zero in $L^1(\mu)$, allora è uniformemente integrabile.
5. Sia ora $\mu(X) < +\infty$. Provare che, se $\{f_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq L^1(\mu)$ è uniformemente integrabile e $f_k \to 0$ q.o., allora $f_k \to 0$ in $L^1(\mu)$.

Svolgimento

1. Sia $\{t_k\}_{k\geqslant 1} \subseteq]0,+\infty[$ tale che $t_k \to +\infty$. Poiché $f \in L^1(\mu)$, vale
$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}\big) = 0\,.$$
Posto
$$f_k(x) = f(x)\chi_{\{|f|>t_k\}}(x)\,,$$
si ha allora $f_k \to 0$ q.o. Inoltre, $|f_k| \leqslant |f| \in L^1(\mu)$ q.o. Per convergenza dominata si deduce che
$$0 = \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_{\{|f|>t_k\}} |f|\, d\mu\,,$$
da cui la conclusione.

2. Sia
$$B_k = \big\{x \in X : |f_k(x)| > g(x)\big\}\,,$$
cosicché $\mu(B_k) = 0$ e
$$\big\{x \notin B_k : |f_k(x)| > t\big\} \subseteq \big\{x \in X : g(x) > t\big\}\,.$$
Allora
$$\begin{aligned}\int_{\{|f_k|>t\}} |f_k|\, d\mu &= \int_{\{|f_k|>t\}\cap B_k} |f_k|\, d\mu + \int_{\{|f_k|>t\}\cap B_k^c} |f_k|\, d\mu \\ &= \int_{\{|f_k|>t\}\cap B_k} |f_k|\, d\mu \;\leqslant \int_{\{|g|>t\}} |g|\, d\mu\,,\end{aligned}$$
da cui la conclusione per il punto precedente, essendo $g \in L^1(\mu)$.

3. Sia $\varepsilon > 0$ fissato e t_ε come al punto precedente in corrispondenza di $\varepsilon/2$. Allora, dato $E \in \mathcal{M}$ si ha
$$\int_E |f_k|\, d\mu = \int_{E\cap\{|f_k|>2t_\varepsilon\}} |f_k|\, d\mu + \int_{E\cap\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}} |f_k|\, d\mu < \varepsilon/2 + 2t_\varepsilon\mu(E)\,.$$
Preso $\delta_\varepsilon < \varepsilon/(4t_\varepsilon)$, si conclude.

4. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$, tale che
$$k > N \quad\Longrightarrow\quad \int_X |f_k|\, d\mu < \varepsilon\,.$$
È facile verificare che $f_1, \dots, f_N$ sono uniformemente integrabili (perché?), e quindi esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che
$$\int_{\{|f_k|>t\}} |f_k|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall t > t_\varepsilon\,, \forall k = 1,\dots,N\,.$$
Allora, fissato $t > t_\varepsilon$, si ottiene
$$\int_{\{|f_k|>t\}} |f_k|\, d\mu \leqslant \begin{cases} \varepsilon & \text{se} \quad k = 1,\dots,N\,, \\ \displaystyle\int_X |f_k|\, d\mu < \varepsilon & \text{se} \quad k > N\,, \end{cases}$$
da cui la conclusione.

5. Fissato $\varepsilon > 0$, sia t_ε come al punto 2. Allora
$$\int_X |f_k|\, d\mu = \int_{\{|f_k|>2t_\varepsilon\}} |f_k|\, d\mu + \int_{\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}} |f_k|\, d\mu < \varepsilon + \int_X |f_k|\chi_{\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}}\,.$$

Essendo

$$|f_k|\chi_{\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}} \to 0 \quad q.o.\,, \qquad |f_k|\chi_{\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}} \leqslant 2t_\varepsilon \in L^1(\mu)$$

perché $\mu(X) < +\infty$, per convergenza dominata di deduce che

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X |f_k|\chi_{\{|f_k|\leqslant 2t_\varepsilon\}} = 0\,,$$

da cui

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_X |f_k|\,d\mu \leqslant \varepsilon\,,$$

e quindi la conclusione.

Esercizio 3

Sia data la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = x^2 e^x \chi_{]-\infty,0[}(x) + \dfrac{1}{1+x^6}\chi_{[0,+\infty[}(x)$.

1. Calcolare T_F, funzione variazione totale di F, e provare che F è NBV.
2. Detta μ_F la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F, calcolare le sue decomposizioni di Lebesgue-Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue, di Hahn e di Jordan.
3. Trovare per quali $p \in [1,\infty]$ la funzione $\varphi(t) = t$ appartiene a $L^p(|\mu_F|)$.

Svolgimento

Il grafico di F è riportato in figura 1 Si osservi che

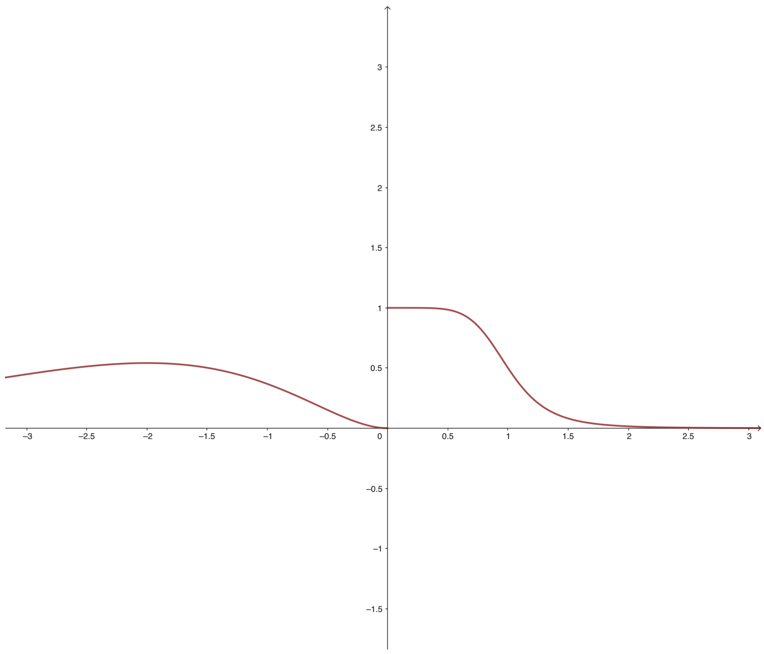

Figura 1: Il grafico della funzione dell'esercizio 3

- F è $\mathcal{C}^1$ a tratti con un punto di salto in $x = 0$;
- F è crescente in $]-\infty,-2]$ e in $]1,+\infty[$;
- F è decrescente in $[-2,0[$ e in $[0,+\infty[$.

1. Banalmente
$$F \in \mathcal{C}^0(]-\infty,0[) \cap \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} F(x) = 1 = F(0)\,.$$
Calcoliamo T_F. Grazie alle proprietà di monotonia di F si ottiene
$$T_F(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{se} \quad x \leqslant -2\,, \\ 8e^{-2} - x^2 e^x & \text{se} \quad -2 < x < 0\,, \\ 8e^{-2} + 2 - \dfrac{1}{1+x^6} & \text{se} \quad x \geqslant 0\,. \end{cases}$$
Inoltre vale
$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\, F = \lim_{x\to+\infty} T_F(x) = 8e^{-2} + 2 < +\infty\,,$$
e quindi Fè funzione NBV.

2. Sfruttando le proprietà di regolarità e monotonia di F si ottiene che la decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym di μ_F rispetto a m è
$$d\mu_F = \left[x(x+2)e^x \chi_{]-\infty,0[}(x) - \frac{6x^5}{(1+x^6)^2}\chi_{]0,+\infty[}(x) \right] dm + \delta_0\,,$$
mentre le decomposizioni di Hahn e Jordan sono rispettivamente
$$P =]-\infty,-2] \cup \{0\}\,, \quad N =]-2,0[\cup]0,+\infty[\,,$$
$$d\mu_F^+ = x(x+2)e^x \chi_{]-\infty,-2]}(x)\, dm + \delta_0\,,$$
$$d\mu_F^- = \left[-x(x+2)e^x \chi_{]-2,0[}(x) + \frac{6x^5}{(1+x^6)^2}\chi_{]0,+\infty[}(x) \right] dm\,.$$

3. Poiché
$$d|\mu_F| = \left[|x(x+2)|e^x \chi_{]-\infty,0[}(x) + \frac{6x^5}{(1+x^6)^2}\chi_{]0,+\infty[}(x) \right] dm + \delta_0\,,$$
fissato $p \in [1,\infty[$, affinché $\varphi \in L^p(|\mu_F|)$ deve essere
$$\int_{-\infty}^0 |t|^p |t(t+2)| e^t\, dt + 6\int_0^{+\infty} t^{p+5} \frac{1}{(1+t^6)^2}\, dt < +\infty\,.$$
Essendo
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{|t|^p |t(t+2)| e^t}{e^{t/2}} = 0\,,$$
utilizzando il criterio del confronto si ottiene che il primo integrale è finito per ogni p. Quanto al secondo integrale, si ha
$$t^{p+5}\frac{1}{(1+t^6)^2} \sim t^{p-7} \quad \text{per } t \to +\infty\,,$$
e quindi, sempre per il criterio del confronto, è finito se e solo se $7-p > 1$, cioè se e solo se $p < 6$. Essendo poi $|\mu_F|(\mathbb{R}) < +\infty$, se fosse $\varphi \in L^\infty(|\mu_F|)$, si avrebbe $\varphi \in L^p(|\mu_F|)$ per ogni p, assurdo. Dunque $\varphi \in L^p(|\mu_F|)$ se e solo se $p < 6$.