Analisi Reale - a.a. 2022/2023

Soluzione del compito del 13/2/2023

Esercizio 1

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ spazio con misura finito, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ successione di funzioni misurabili da X in $\mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un'altra funzione misurabile.

1. Si enunci il teorema di Egoroff.
2. Sia $f_n \rightarrow f$ q.o. È vero o falso che $f_n \rightarrow f$ in misura?
3. Sia $f_n \rightarrow f$ q.o. È vero o falso che esiste $p \in [1, \infty[$ tale che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(\mu)$?
4. Si supponga ora che $\|f_n\|_p \leq M$ per qualche $M > 0$ e $1 < p < \infty$. Si provi che se $f_n \rightarrow f$ in misura, allora $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mu)$.
5. Supponendo che $\sum_n \|f_n\|_3$ converga, è vero o falso che $\sum_n f_n$ converge in $L^2(\mu)$?

Svolgimento

1. Omesso.
2. È vero. Sia $\varepsilon > 0$. Grazie al teorema di Egoroff, fissato $\delta > 0$, esiste un insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \delta$ e $f_n \rightrightarrows f$ in E^c . Sia

$$A_{\varepsilon, n} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \quad (1)$$

Allora

$$\mu(A_{\varepsilon, n}) = \mu(A_{\varepsilon, n} \cap E) + \mu(A_{\varepsilon, n} \cap E^c) < \delta + \mu(A_{\varepsilon, n} \cap E^c),$$

e si conclude per l'arbitrarietà di $\delta > 0$, perché $f_n \rightrightarrows f$ su E^c .

3. È falso. Si consideri l'intervallo $[0, 1]$ dotato della misura di Lebesgue e sia $f_n = n\chi_{[0, 1/n]}$. Allora $f_n \rightarrow 0$ q.o., ma

$$\lim_n \|f_n\|_p^p = \lim_n \int_0^{1/n} n^p dx = n^{p-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 1, \\ +\infty & \text{se } p > 1, \end{cases}$$

da cui la conclusione.

4. Innanzitutto si osservi che esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ q.o. e quindi, grazie al lemma di Fatou,

$$\|f\|_p^p = \int_X \lim_k |f_{n_k}|^p d\mu \leq \liminf_k \int_X |f_{n_k}|^p d\mu \leq M^p,$$

da cui $f \in L^p(\mu)$ e $\|f\|_p \leq M$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $A_{\varepsilon, n}$ come in (1). Allora, grazie alla disuguaglianza di Hölder, detto $1 < q < \infty$ l'esponente coniugato, di p si ha

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &= \int_{A_{\varepsilon, n}} |f_n - f| d\mu + \int_{A_{\varepsilon, n}^c} |f_n - f| d\mu \leq \mu(A_{\varepsilon, n})^{1/q} \|f_n - f\|_p + \varepsilon \mu(X) \\ &\leq 2M \mu(A_{\varepsilon, n})^{1/q} + \varepsilon \mu(X), \end{aligned}$$

e si conclude grazie all'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e al fatto che $\mu(A_{\varepsilon, n}) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

5. È vero. Poiché $L^3(\mu)$ è completo, $\sum_n f_n$ converge in tale spazio e, essendo $L^3(\mu) \subseteq L^2(\mu)$ con immersione continua (ricordiamo che $\mu(X) < +\infty$), si deduce che la serie converge anche in $L^2(\mu)$.

Esercizio 2

Siano X insieme non vuoto e $w : X \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione. Sia $\mu_w : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\mu_w(E) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} w(x) : F \subseteq E, |F| < \aleph_0 \right\},$$

dove $|F|$ è la cardinalità di F , e si dia per noto che μ_w è una misura su $\mathcal{P}(X)$. Si assuma che sia X infinito e che $\mu_w(X) = +\infty$. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra di $\mathcal{P}(X)$ i cui elementi sono insiemi finiti o co-finiti. Sia $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da $\mu(A) = \mu_w(A)$ se $|A| < \aleph_0$ e $\mu(A) = +\infty$ se $|A| \geq \aleph_0$.

1. Provare che $\mu(A) = \mu_w(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e che μ è una premisura.

2. Posto

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supseteq E, A_j \in \mathcal{A} \right\}, \quad E \in \mathcal{P}(X),$$

si provi, senza utilizzare risultati noti, che μ^* è una misura esterna e che $\mu^*(A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.

3. Provare che $\mu_w(E) \leq \mu^*(E)$ per ogni $E \subseteq X$ e che $\mu^*(E) = +\infty$ per ogni E tale che $|E| > \aleph_0$.

4. Provare che $\mu^*(E) = \mu_w(E)$ per ogni $E \subseteq X$ tale che $|E| \leq \aleph_0$.

5. Provare che ogni sottoinsieme di X è μ^* -misurabile.

Svolgimento

1. È sufficiente dimostrare che $\mu(A) = +\infty$ quando A è co-finito. Si ha

$$+\infty = \mu_w(X) = \mu_w(A) + \mu_w(A^c) = \mu_w(A) + \mu(A^c),$$

e quindi $\mu_w(A) = +\infty = \mu(A)$, essendo $\mu_w(A^c) < +\infty$. Il fatto che μ sia premisura segue immediatamente dalla considerazione che μ_w lo è e che coincide con questa su $\mathcal{A}$, per cui, se $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ è successione di insiemi a due a due disgiunti tale che

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A},$$

allora

$$\mu(A) = \mu_w(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_w(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

2. La dimostrazione che μ^* è misura esterna è stata svolta a lezione ed è omessa. Dimostriamo che $\mu^*(A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Se $A \in \mathcal{A}$, $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ con $A_1 = A$, $A_j = \emptyset$ per ogni $j \geq 2$ è un ricoprimento di A per cui vale

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A_1) = \mu(A).$$

Dimostriamo la disuguaglianza opposta. Se $\mu^*(A) = +\infty$, essa è banalmente verificata. Altrimenti, fissato $\varepsilon > 0$, troviamo $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Si ottiene

$$\mu(A) = \mu_w(A) \leq \mu_w\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_w(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon,$$

da cui la conclusione per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

3. Se $\mu^*(E) = +\infty$, la disuguaglianza è banalmente verificata. Altrimenti, si procede come sopra: fissato $\varepsilon > 0$, si trova $\{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon,$$

da cui

$$\mu_w(E) \leq \mu_w\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_w(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Sia ora $E \subseteq X$ tale che $|E| > \aleph_0$. Allora, se

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \{A_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A},$$

esiste $k \geq 1$ tale che $|A_k| > \aleph_0$, e quindi $\mu(A_k) = +\infty$ per definizione. Ne consegue che necessariamente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = +\infty,$$

da cui la conclusione per l'arbitrarietà della successione $\{A_j\}_{j \geq 1}$.

4. È sufficiente provare che $\mu^*(E) \leq \mu_w(E)$. Si noti che, se $|E| \leq \aleph_0$, allora, essendo al più numerabile,

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}, \quad \{x_j\} \in \mathcal{A},$$

da cui

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_w(\{x_j\}) = \mu_w(E),$$

perché μ_w è una misura.

5. Sia $E \subseteq X$ e si fissi $F \subseteq X$. Se $|F| > \aleph_0$, allora $\mu^*(F) = +\infty$ e quindi

$$\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c).$$

Se $|F| \leq \aleph_0$, sfruttando il punto precedente ed il fatto che μ_w è misura, si ottiene

$$\mu^*(F) = \mu_w(F) = \mu_w(F \cap E) + \mu_w(F \cap E^c) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c),$$

perché, naturalmente, $|F \cap E|, |F \cap E^c| \leq \aleph_0$.

Esercizio 3

Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = e^x \chi_{]-\infty, 0[}(x) + (x+2) \chi_{[0, \pi/2[}(x) + \chi_{[\pi/2, +\infty[}(x) \int_{\pi/2}^x \frac{\sin t}{1+t^4} dt.$$

1. Provare che $F \in \text{NBV}(\mathbb{R})$.
2. Calcolare le decomposizioni di Lebesgue-Radon-Nikodym rispetto alla misura di Lebesgue, Hahn e Jordan di μ_F , misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad F .
3. Data $f(x, y) = |x|e^{-|y|}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, trovare per quali $p \in [1, \infty]$ vale $f \in L^p(|\mu_F| \times m)$.
4. Dato l'insieme $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq x \leq 2\}$, calcolare

$$\iint_T y(1+x^4) d(|\mu_F| \times m)(x, y).$$

Svolgimento

1. La verifica che F è continua a destra è facile ed è lasciata al lettore. Inoltre, banalmente ha limite zero a $-\infty$. Osservato che F è $\mathcal{C}^1$ a tratti, per verificare che è BV, è sufficiente verificare che $F' \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |F'(x)| dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\pi/2} 1 dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} dx = 1 + \frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} dx.$$

Poiché

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+x^4},$$

che è funzione integrabile, anche l'ultimo integrale è finito e quindi $F' \in L^1(\mathbb{R})$, come si voleva.

2. Sfruttando il lavoro al punto precedente, posto

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty}]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty}](2k-1)\pi, 2k\pi],$$

si ha che

$$d\mu_F = \left(e^x \chi_{]-\infty, 0[}(x) + \chi_{]0, \pi/2[}(x) + \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} \chi_{] \pi/2, +\infty[}(x) \right) dx + \delta_0 - (2 + \pi/2) \delta_{\pi/2},$$

$$P =]-\infty, \pi/2[\cup] \pi/2, \pi] \cup A, \quad N = \{\pi/2\} \cup B$$

$$d\mu_F^+ = \left(e^x \chi_{]-\infty, 0[}(x) + \chi_{]0, \pi/2[}(x) + \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} (\chi_{] \pi/2, \pi]}(x) + \chi_A(x)) \right) dx + \delta_0,$$

$$d\mu_F^- = (2 + \pi/2) \delta_{\pi/2} - \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} \chi_B(x) dx,$$

sono le decomposizioni cercate.

3. Sia $p \in [1, \infty[$ fissato. Dobbiamo verificare se

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |x|^p e^{-p|y|} d\mu_F \times m(x, y) < +\infty.$$

Poiché μ_F è finita e m è σ -finita, possiamo applicare il teorema di Tonelli e ottenere

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |x|^p e^{-p|y|} d\mu_F \times m(x, y) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-p|y|} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu_F(x) \right).$$

Il primo integrale è finito per ogni $p \geq 1$. Quanto al secondo, poiché

$$d|\mu_F| = \left(e^x \chi_{]-\infty, 0[}(x) + \chi_{]0, \pi/2[}(x) + \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} \chi_{] \pi/2, +\infty[}(x) \right) dx + \delta_0 + (2 + \pi/2) \delta_{\pi/2},$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu_F(x) = \int_{-\infty}^0 |x|^p e^x dx + \int_0^{\pi/2} |x|^p dx + (2 + \pi/2)(\pi/2)^p + \int_{\pi/2}^{+\infty} |x|^p \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} dx.$$

Si vede facilmente che i primi due integrali sono finiti. Quanto al terzo si ha

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} |x|^p \frac{|\operatorname{sen} x|}{1+x^4} \sim \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|^{4-p}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

che è integrabile se e solo se $4 - p > 1$, cioè se e solo se $p < 3$. Quindi, se $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(|\mu_F| \times m)$ se e solo se $p < 3$. Se fosse $f \in L^\infty(|\mu_F| \times m)$, allora, poiché

$$L^1(|\mu_F| \times m) \cap L^\infty(|\mu_F| \times m) \subseteq L^p(|\mu_F| \times m) \quad \forall p \geq 1,$$

si avrebbe $f \in L^3(|\mu_F| \times m)$. Si deduce che $f \in L^p(|\mu_F| \times m)$ se e solo se $1 \leq p < 3$.

4. Sfruttando il teorema di Fubini e il fatto che $T_x =]0, x]$, $0 < x \leq 2$, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_T y(1+x^4) d(|\mu_F| \times m)(x, y) &= \int_{]0,2]} \left(\int_0^x y(1+x^4) dy \right) d|\mu_F|(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_{]0,2]} x^2(1+x^4) d|\mu_F|(x) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2(1+x^4) dx + [2 + (\pi/2)^4] \pi^2/8 + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^2 x^2 \sin x dx. \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito degli integrali è lasciato al lettore.