Programma del corso di Analisi Reale
Laurea in Matematica
Anno Accademico 2023/2024

N.B.: la numerazione degli enunciati si riferisce al

Testo di riferimento: G.B. Folland, *Real Analisys*, Wiley-Interscience, seconda edizione.

Legenda: dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

Teoria della misura

Elementi introduttivi. Insieme non misurabile di Vitali. Nozioni di algebra e σ-algebra di insiemi. σ-algebra dei boreliani. Nozione di misura. Monotonia, subadditività, continuità dal basso e dall'alto di una misura (D). Completamento di una misura. Misura esterna ed insiemi misurabili per una misura esterna. Teorema di Caratheodory (D). Premisura ed estensione di una premisura (Proposizione 1.13, D).

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ Costruzione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$: premisura sull'algebra dei plurintervalli, sua estensione ai boreliani di $\mathbb{R}^n$ e completamento. Insieme ternario di Cantor. Regolarità della misura di Lebesgue: approssimazione con aperti e compatti (D). Caratterizzazione degli insiemi Lebesgue-misurabili tramite insiemi F_σ e G_δ (D). Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue (D). Unicità della misura di Lebesgue. Misure di Lebesgue-Stieltjes e loro caratterizzazione come misure associate ad una funzione crescente (Teorema 1.16, D). σ-algebre prodotto e misure prodotto.

Teoria dell'integrazione

Funzioni misurabili. Definizione di funzione misurabile. Misurabilità di somma, prodotto e quoziente di funzioni misurabili. Misurabilità delle parti positiva e negativa e del modulo di una funzione misurabile. Misurabilità di sup, inf, $\limsup$, $\liminf$ di successioni di funzioni misurabili (D). Funzioni semplici. Approssimazione di una funzione misurabile con funzioni semplici (Teorema 2.10, D). Teorema di Egoroff (D).

Integrazione. Integrazione di funzioni semplici e di funzioni non negative. Proprietà dell'integrale di funzioni non negative. Teorema della convergenza monotona (D). Teorema di integrazione per serie per funzioni non negative (Teorema 2.15, D). Lemma di Fatou (D). Lo spazio $L^1(\mu)$. Teorema della convergenza dominata (D). Teorema di integrazione per serie (Teorema 2.25, D). Completezza di $L^1(\mu)$ (D). Densità delle funzioni semplici e delle funzioni continue a supporto compatto in $L^1(m)$. Teorema di Lusin. Teorema di continuità e di derivabilità degli integrali dipendenti da parametro (Teorema 2.27, D). Relazione tra funzioni Riemann-integrabili e Lebesgue-integrabili (Teorema 2.28). Convergenza in misura. Convergenza in misura e in L^1 e relazione con la convergenza quasi ovunque (Teorema 2.30 e Corollario 2.32, D). Calcolo della misura prodotto di un insieme (Teorema 2.36, D). Teorema di Fubini-Tonelli (D). Invarianza per traslazioni dell'integrale rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Teorema del cambio di variabile in $\mathbb{R}^n$.

Spazi L^p

Spazi L^p e loro proprietà. Definizione di spazio e norma L^p. Disuguaglianza di Hölder (D). Disuguaglianza triangolare (D). Completezza di L^p (D). Separabilità di L^p con $p < \infty$. Proprietà di interpolazione ed inclusione (Proposizioni 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, D). Caratterizzazione della norma p con lo spazio duale (Proposizione 6.13). Caratterizzazione del duale topologico di L^p (Teorema 6.15). Disuguaglianza di Chebyshev (D). Disuguaglianza di Minkowski per gli integrali.

Convoluzione. Definizione del prodotto di convoluzione. Disuguaglianza di Young (D). Regolarità del prodotto di convoluzione (Proposizione 8.8, D, e Proposizione 8.10). Unità approssimata e mollificatori. Approssimazione di una funzione tramite convoluzioni (Teorema 8.14, D escluso il punto c). Densità di $\mathcal{C}_c^\infty$ in $L^p(m)$ (D). Lemma di Urysohn $\mathcal{C}^\infty$ (D).

Misure con segno e teoremi di differenziazione

Misure con segno. Definizione di misura con segno. Misure assolutamente continue e misure singolari. Caratterizzazione di una misura assolutamente continua rispetto ad un'altra (Teorema 3.5, D). Decomposizioni di Hahn e di Jordan (D). Teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym (D). Teorema di differenziazione di Lebesgue. Differenziazione di una misura di Borel regolare rispetto alla misura di Lebesgue (Teorema 3.22). Derivabilità delle funzioni monotone (D).

Teorema fondamentale del calcolo. Funzioni assolutamente continue. Variazione totale di una funzione e funzioni a variazione totale limitata. Misura associata ad una funzione a variazione totale limitata. Funzioni BV come differenza di funzioni crescenti (D). Limitatezza della variazione totale di funzioni assolutamente continue. Relazione tra assoluta continuità di una funzione NBV e assoluta continuità della misura ad essa associata rispetto alla misura di Lebesgue (Proposizione 3.32, D). Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali di Lebesgue (D).