FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Appello del 23.02.2012

Esercizio 1 [9 punti]

Con un opportuno cambio di variabili si calcoli

$$\iiint_D \sqrt{(x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2}\, dxdydz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2 \leq 1\,,\ z^2 - (x/2)^2 - (y/3)^2 \leq 0\,,\ z \geq 0\}\,.$$

Esercizio 2 [9 punti]

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{1+t^2}\,. \tag{1}$$

1. Si scriva l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1).
2. Si scriva l'integrale generale di (1).
3. Si calcoli la soluzione di (1) con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Esercizio 3 [9 punti]

Sia data l'equazione

$$e^z - z - x \operatorname{sen} y + (y+1)\cos x = 2\,, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{2}$$

1. Si enunci il teorema di Dini per un vincolo in $\mathbb{R}^3$ e si dimostri la formula per il calcolo delle derivate della funzione implicita.
2. Si provi che (2) definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $(x, z) \mapsto \varphi(x, z)$ tale che $\varphi(0, 0) = 0$.
3. Si provi che la funzione implicita φ ha in $(0, 0)$ un punto di sella.

Esercizio 4 [9 punti]

Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 = 16 - z\,,\ z \in [0, 12]\}\,.$$

1. Si provi che Σ è una superficie regolare.
2. Si enunci il teorema della divergenza.
3. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

   $$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(y - x^3, x - y^3, 3z(x^2 + y^2)\big)$$

   attraverso la superficie Σ orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa.

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.