

FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Appello del 13.09.2012

Esercizio 1 [10 punti]

Dato l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 - z^2 < 0, z > 0\},$$

lo si disegni e si calcoli

$$\iiint_S \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

(Sugg.: usare coordinate cilindriche)

Esercizio 2 [10 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}, \frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}} \right)$$

definito nell'insieme $A = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$.

1. Dire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso calcolarne il potenziale U tale che $U(1, 0) = 1$;
2. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ definita implicitamente da $y^2 - x^2 = 3$, con $y > 0$, $x \in [-1, 1]$, e percorsa nel verso delle x crescenti.
3. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{x}{\sqrt{x+y}} \\ \ddot{y} = \frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}} \end{cases}, \quad x + y > 0,$$

se ne scriva un integrale primo.

Esercizio 3 [8 punti]

Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

sulla superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con $R > 0$.

Esercizio 4 [8 punti]

Si provi che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è differenziabile in $(0, 0)$.

Tempo a disposizione: tre ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.