Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2011/2012

Primo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{sen}^2(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Si provi che f è funzione continua.
2. Si diano le definizioni di derivate parziali di f in un generico punto (x_0, y_0) e si provi che la funzione è derivabile in $(0,0)$.
3. Si dia la definizione di differenziabilità di f in un generico punto (x_0, y_0) e si provi che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

1. Per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo ed è quindi continua. Per dimostrare che è continua anche in $(0,0)$ bisogna provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

   Si osservi che

$$|f(x,y)| \leq |x| \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = |x| \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right|^2 \leq \frac{|x|}{4}\,.$$

   Poiché $|x| \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$, dal teorema dei due carabinieri si deduce la continuità di f in $(0,0)$.

2. Essendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, usando la definizione di derivata parziale si trova che f è derivabile e vale $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

3. Poiché $f(0,0) = \partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$, affinché f sia differenziabile in $(0,0)$ deve essere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)x - \partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}^2(xy)}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

   Prendendo la restrizione alla retta $y = x$ si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}^2(x^2)}{4x^4\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{4\sqrt{2}|x|} \frac{\mathrm{sen}^2(x^2)}{x^4}$$

   che non esiste: infatti si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{4\sqrt{2}|x|} \frac{\mathrm{sen}^2(x^2)}{x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{4\sqrt{2}|x|} \frac{\mathrm{sen}^2(x^2)}{x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\,\mathbf{i}+\frac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\,\mathbf{j}-(1+\tan^2 z)\mathbf{k}$$

definito in $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x>0\,,\ y>0\,,\ z\in]-\pi/2,\pi/2[\right\}$.

1. Provare che $\mathbf{F}$ è conservativo e calcolarne il potenziale U tale che $U(1,1,\pi/4)=0$.

2. Provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} U(x,y,z)=1\,, \\ z=0\,, \end{cases} \qquad (x,y,z)\in\Omega\,, \tag{1}$$

   definisce una curva regolare.

3. Si verifichi che $t\mapsto(\cos t, e^{\operatorname{sen} t}\cos t, 0)$, $t\in]-\pi/2,\pi/2[$ è una parametrizzazione della curva di cui al punto 2 e si calcoli l'area della regione D nel piano xy racchiusa da tale curva.

4. Dopo aver enunciato il teorema del rotore (o di Stokes), si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\mathbf{F}(x+1,y+1,z)-y\,\mathbf{i}+x\mathbf{j}\,,\qquad x>-1\,,\ y>-1\,,\ z\in]-\pi/2,\pi/2[\,,$$

   attorno al bordo di D orientato in senso antiorario, se guardato nella direzione dell'asse z.

Svolgimento

1. Poiché Ω è semplicemente connesso, affinché $\mathbf{F}$ sia conservativo è sufficiente che sia irrotazionale. Si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)&=\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}} & \frac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}} & -(1+\tan^2 z)\end{pmatrix}\\
&=0\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}+\left[\partial_x\frac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}-\partial_y\frac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\right]\mathbf{k}\\
&=(0,0,0)\,,
\end{aligned}$$

   essendo

$$\begin{aligned}
\partial_x\frac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}&=\frac{1}{y^2\left[x^2+(\ln y-\ln x)^2\right]}\cdot\left[-\frac{y}{x}\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}+\right.\\
&\qquad\left.-y(\ln y-\ln x)\frac{1}{\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\left(x-\frac{\ln y-\ln x}{x}\right)\right]\\
&=-\frac{x(1+\ln y-\ln x)}{y\left[x^2+(\ln y-\ln x)^2\right]^{3/2}}\,,
\end{aligned}$$

e

$$\partial_y \frac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}} = \frac{1}{x^2\big[x^2+(\ln y-\ln x)^2\big]}\cdot\Bigg[-\frac{x}{y}\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}+$$

$$-x(x^2-\ln y+\ln x)\frac{1}{\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\frac{\ln y-\ln x}{y}\Bigg]$$

$$= -\frac{x(1+\ln y-\ln x)}{y\big[x^2+(\ln y-\ln x)^2\big]^{3/2}}\,.$$

Il potenziale U deve verificare

$$\begin{cases}\partial_x U(x,y,z) = \dfrac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\\ \partial_y U(x,y,z) = \dfrac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}\\ \partial_z U(x,y,z) = -(1+\tan^2 z)\,.\end{cases} \tag{2}$$

Dalla seconda equazione si ricava che

$$U(x,y,z) = \sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}+\varphi(x,z)\,,$$

per una opportuna funzione φ di classe $\mathcal{C}^1$. Poiché

$$\partial_x\big[\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}+\varphi(x,z)\big] = \frac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}}+\partial_x\varphi(x,z)$$

$$\partial_z\big[\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}+\varphi(x,z)\big] = \partial_z\varphi(x,z)\,,$$

affinché (2) siano verificate deve essere

$$\begin{cases}\partial_x\varphi(x,z) = 0\\ \partial_z\varphi(x,z) = -(1+\tan^2 z)\,,\end{cases}$$

da cui si ricava $\varphi(x,z) = -\tan z + c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è arbitraria. Imponendo che $U(1,1,\pi/4) = 0$, si trova poi che $c = 0$ e quindi

$$U(x,y,z) = \sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}-\tan z\,.$$

2. Affinché il sistema definisca una curva regolare la matrice

$$\begin{pmatrix}\dfrac{x^2-\ln y+\ln x}{x\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}} & \dfrac{\ln y-\ln x}{y\sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}} & -(1+\tan^2 z)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

deve avere rango 2 nei punti che soddisfano (1). Ciò *non* accade se sono verificate

$$\begin{cases}x^2-\ln y+\ln x = 0\\ \ln y-\ln x = 0\\ \sqrt{x^2+(\ln y-\ln x)^2}-\tan z = 1\\ z = 0\,,\end{cases} \qquad (x,y,z)\in\Omega\,.$$

Poiché dalla seconda equazione si ricava che deve essere $x = y$, si ottiene che il sistema è verificato solo se $x = 0$, e quindi non ha soluzioni in Ω, come si voleva.

3. Chiamiamo

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, e^{\operatorname{sen} t}\cos t, 0)\,, \qquad t \in]-\pi/2, \pi/2[\,,$$

la parametrizzazione data. Si ha

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}(t)) = U(\cos t, e^{\operatorname{sen} t}\cos t, 0) &= \sqrt{\cos^2 t + \left[\ln(e^{\operatorname{sen} t}\cos t) - \ln\cos t\right]^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + (\operatorname{sen} t + \ln\cos t - \ln\cos t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = 1\,, \end{aligned}$$

mentre l'equazione $z = 0$ è banalmente verificata lungo la curva. Quindi ogni punto della

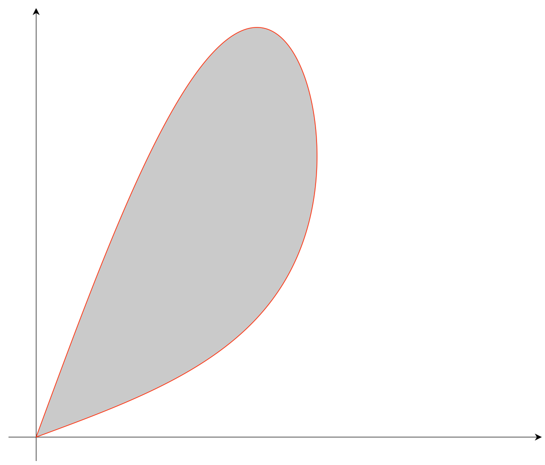

Figura 1: La curva sul piano xy di cui all'esercizio 2 e il dominio D da essa racchiuso

curva parametrizzata da $\mathbf{r}$ soddisfa (1). D'altra parte, se $(x, y, z) \in \Omega$ soddisfa (1), allora vale

$$x^2 + (\ln y - \ln x)^2 = 1\,,$$

e quindi $x = \cos t$ e $\ln y - \ln x = \operatorname{sen} t$ per un opportuno $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ (si ricordi che $x > 0$!), da cui si ricava la parametrizzazione data (per un disegno della curva si veda la figura 1). Per calcolare l'area di D è sufficiente usare una delle formule dell'area che si ricavano dalla formula di Gauss-Green. Osservato che con la parametrizzazione data la curva è percorsa in senso antiorario, si ha

$$\begin{aligned} |D| &= -\int_{\partial^+ D} y\,dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t}\cos t(-\operatorname{sen} t)\,dt = e^{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t}\cos t\,dt \\ &= e + e^{-1} - e^{\operatorname{sen} t}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2e^{-1}\,. \end{aligned}$$

4. Poiché $\mathbf{F}$ è irrotazionale, si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(x, y, z) = \operatorname{rot}\mathbf{F}(x+1, y+1, z) + \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial y & \partial z \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) + 2\,\mathbf{k} = 2\,\mathbf{k}\,.$$

Grazie al teorema del rotore si ottiene

$$\oint_{\partial^+ D} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{G}\cdot\mathbf{k}\,dS = 2\iint_D dS = 2|D| = 4e^{-1}\,.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{2} + 3x\,, \qquad x^2 + y^2 \leq 4\,.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
3. Discutere la natura dei punti critici di f in $B_2(0,0)$.
4. Calcolare massimo e minimo di f.

Svolgimento

1. Essendo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$ chiuso e limitato e f funzione continua, questa ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass.

3. I punti critici di f soddisfano

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x+3 = 0 \\ -y = 0\,, \end{cases}$$

   e quindi l'unico punto critico di f è $(-3/2, 0)$, che appartiene a $B_2(0,0)$. Per studiarne la natura, calcoliamo la matrice hessiana di f in tale punto. Si ha

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = 2\,, \quad \partial^2_{xy} f(x,y) = \partial^2_{yx} f(x,y) = 0\,, \quad \partial^2_{yy} f(x,y) = -1\,,$$

   dove si è usato il teorema di Schwarz, essendo f di classe $\mathcal{C}^2$. Allora

$$H_f(-3/2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

   che non è semidefinita, avendo due autovalori di segno opposto. Se ne deduce che $(-3,0)$ è punto di sella.

4. Poiché l'unico punto di critico di f interno a $B_2(0,0)$ è punto di sella, i punti di massimo e minimo appartengono necessariamente al bordo di $B_2(0,0)$. Per calcolarli bisogna quindi risolvere i problemi di estremo vincolato

$$\min_{x^2+y^2=4} f(x,y)\,, \qquad \max_{x^2+y^2=4} f(x,y)\,. \tag{3}$$

   Proponiamo tre metodi.

   (a) Poiché il vincolo $x^2+y^2=4$ è costituito di soli punti regolari, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ci si riconduce a calcolare i punti critici della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - \frac{y^2}{2} + 3x - \lambda(x^2+y^2-4)\,.$$

   Devono essere verificate

$$\begin{cases} 2x+3-2\lambda x = 0 \\ -y-2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x+3-2\lambda x = 0 \\ y(1+2\lambda) = 0 \\ x^2+y^2 = 4\,. \end{cases}$$

Il sistema ha soluzioni (x,y,λ) date da

$$(2,0,7/4)\,,\quad (-2,0,1/4)\,,\quad (-1,\sqrt{3},-1/2)\,,\quad (-1,-\sqrt{3},-1/2)\,.$$

Poiché $f(2,0)=10$, $f(-2,0)=-2$, $f(-1,\sqrt{3})=f(-1,-\sqrt{3})=-7/2$, si deduce che

$$\min_{x^2+y^2\le 4} f(x,y)=f(-1,\sqrt{3})=f(-1,-\sqrt{3})=-7/2\,,\qquad \max_{x^2+y^2\le 4} f(x,y)=f(2,0)=10\,.$$

(b) Dall'equazione del vincolo si ricava che $y^2=4-x^2$, $\in[-2,2]$. Allora, per risolvere (3), ci si può ricondurre a cercare gli estremi della funzione

$$\varphi(x)=f(x,4-x^2)=x^2-\frac{4-x^2}{2}+3x=\frac{3}{2}x^2+3x-2\,,\qquad x\in[-2,2]\,.$$

Poiché $\varphi'(x)=0$ se e solo se $x=-1\in[-2,2]$, si ha che

$$\min_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\min_{x\in[-2,2]}\varphi(x)=\min\big\{\varphi(-2),\varphi(2),\varphi(-1)\big\}=-\frac{7}{2}\,,$$
$$\max_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\max_{x\in[-2,2]}\varphi(x)=\max\big\{\varphi(-2),\varphi(2),\varphi(-1)\big\}=10\,.$$

(c) Parametrizzando la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$ con

$$\mathbf{r}(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t)\,,\qquad t\in[0,2\pi[\,,$$

e posto

$$\psi(t)=f(\mathbf{r}(t))=4\cos^2 t-\frac{4\operatorname{sen}^2 t}{2}+6\cos t\,,\qquad t\in[0,2\pi[\,,$$

si ottiene che

$$\min_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\min_{t\in[0,2\pi[}\psi(t)\,,\qquad \max_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\max_{t\in[0,2\pi[}\psi(t)\,.$$

Poiché $\psi'(t)=-6\operatorname{sen} t(2\cos t+1)$, si ha che $\psi'(t)=0$ in $]0,2\pi[$ se e solo se $t=\pi$, $t=2\pi/3$ o $t=4\pi/3$. Se ne deduce che

$$\min_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\min\big\{\psi(0),\psi(2\pi/3),\psi(\pi),\psi(4\pi/3)\big\}=-\frac{7}{2}\,,$$
$$\max_{x^2+y^2=4} f(x,y)=\max\big\{\psi(0),\psi(2\pi/3),\psi(\pi),\psi(4\pi/3)\big\}=10\,.$$