Fondamenti Analisi Matematica 2 - a.a. 2011/2012

Secondo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Con un opportuno cambio di variabili si calcoli

$$\iiint_D \sqrt{(x/2)^2+(y/3)^2+z^2}\, dxdydz$$

dove

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x/2)^2+(y/3)^2+z^2\le 1\,,\ z^2-(x/2)^2-(y/3)^2\le 0\,,\ z\ge 0\right\}.$$

Svolgimento

L'integrale si può calcolare con due diversi cambiamenti di coordinate.

1. Facciamo una trasformazione di coordinate ponendo

$$\begin{cases} x=2\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta\,, \\ y=3\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \\ z=\rho\cos\varphi\,, \end{cases} \qquad \rho\ge 0\,,\quad \varphi\in[0,\pi]\,,\quad \vartheta\in[0,2\pi[\,,$$

cosicché $(x/2)^2+(y/3)^2+z^2=\rho^2$. La matrice jacobiana della trasformazione è

$$J(\rho,\varphi,\vartheta)=\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta & 2\rho\cos\varphi\cos\vartheta & -2\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ 3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 3\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 3\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è $6\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Per determinare come viene trasformato il dominio D si osservi che

$$\begin{aligned} &(x/2)^2+(y/3)^2+z^2\le 1 &&\iff \rho\le 1\,, \\ &z^2-(x/2)^2-(y/3)^2\le 0 &&\iff \cos^2\varphi-\mathrm{sen}^2\,\varphi\le 0 &&\iff \pi/4\le\varphi\le 3\pi/4\,, \\ &z\ge 0 &&\iff \cos\varphi\ge 0 &&\iff 0\le\varphi\le\pi/2\,. \end{aligned}$$

Allora D nelle nuove coordinate si rappresenta come

$$\widetilde{D}=\left\{(\rho,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^{\ge 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi[: \rho\le 1\,,\ \varphi\in[\pi/4,\pi/2]\right\}.$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{(x/2)^2+(y/3)^2+z^2}\, dxdydz &= \iiint_{\widetilde{D}} 6\rho\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho d\varphi d\vartheta \\ &= 6\int_0^{2\pi}\left(\iint_{[0,1]\times[\pi/4,\pi/2]} \rho^3\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho d\varphi\right) d\vartheta \\ &= 12\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

2. Facciamo una trasformazione di coordinate ponendo

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\vartheta\,, \\ y = 3\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \qquad\qquad \rho \geq 0\,, \quad \vartheta \in [0, 2\pi[\,, \\ z = z\,, \end{cases}$$

cosicché $(x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2 = \rho^2 + z^2$. La matrice jacobiana della trasformazione è

$$J(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\vartheta & -2\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \\ 3\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 3\rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è 6ρ. Per determinare come viene trasformato il dominio D si osservi che, dovendo essere $z \geq 0$,

$$\begin{aligned} (x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2 \leq 1 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - z^2}\,, \\ z^2 - (x/2)^2 - (y/3)^2 \leq 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 \leq z \leq \rho\,. \end{aligned}$$

Poiché $0 \leq z \leq \sqrt{1 - z^2}$ se e solo se $0 \leq z \leq \sqrt{2}/2$, si ottiene che D nelle nuove coordinate si rappresenta come

$$\widehat{D} = \left\{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \leq z \leq \sqrt{2}/2\,,\ z \leq \rho \leq \sqrt{1 - z^2}\right\}.$$

Allora l'integrale da calcolare diventa

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{(x/2)^2 + (y/3)^2 + z^2}\, dxdydz &= \iiint_{\widehat{D}} 6\rho\sqrt{\rho^2 + z^2}\, d\rho d\vartheta dz \\ &= 12\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_z^{\sqrt{1-z^2}} \rho\sqrt{\rho^2 + z^2}\, d\rho \right) dz \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (\rho^2 + z^2)^{3/2} \Big|_z^{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(1 - 2^{3/2} z^3\right) dz = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{1 + t^2}\,. \tag{1}$$

1. Si scriva l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1).
2. Si scriva l'integrale generale di (1).
3. Si calcoli la soluzione di (1) con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Svolgimento

1. L'equazione caratteristica si scrive

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

ed ha come soluzione $\lambda = 2$ con molteplicità 2. Allora una base di soluzioni per l'equazione omogenea associata a (1) è data da $\varphi_1(t) = e^{2t}$ e $\varphi_2(t) = te^{2t}$. L'integrale generale si scrive

$$\tilde{y}(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t}\,, \tag{2}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

2. Per scrivere l'integrale generale di (1) occorre procurarci una soluzione particolare. Per utilizzare il metodo della variazione delle costanti imponiamo in (2) che $\tilde{y}(0) = 0$ e $\tilde{y}'(0) = 1$, ottenendo $A = 0$ e $B = 1$. Allora una soluzione particolare di (1) si scrive

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t (t-s)e^{2(t-s)} \frac{e^{2s}}{1+s^2}\, ds = e^{2t} \int_0^t (t-s)\frac{1}{1+s^2}\, ds \\ &= te^{2t} \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\, ds - e^{2t} \int_0^t \frac{s}{1+s^2}\, ds = te^{2t} \arctan t - \frac{1}{2} e^{2t} \ln(1+t^2)\,. \end{aligned}$$

L'integrale generale di (1) si scrive

$$y(t) = \tilde{y}(t) + v(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} + te^{2t} \arctan t - \frac{1}{2} e^{2t} \ln(1+t^2)\,. \tag{3}$$

3. Da (3) si ottiene che $y(0) = A$ e, essendo

$$y'(t) = 2Ae^{2t} + B(2t+1)e^{2t} + e^{2t}(2t+1)\arctan t - e^{2t} \ln(1+t^2)\,,$$

$y'(0) = 2A + B$. Imponendo le condizioni iniziali si ricava che

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -2\,. \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$y(t) = e^{2t} - 2te^{2t} + te^{2t} \arctan t - \frac{1}{2} e^{2t} \ln(1+t^2)\,.$$

Esercizio 3

Sia data l'equazione

$$e^z - z - x \operatorname{sen} y + (y+1)\cos x = 2\,, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{4}$$

1. Si enunci il teorema di Dini per un vincolo in $\mathbb{R}^3$ e si dimostri la formula per il calcolo delle derivate della funzione implicita.

2. Si provi che (4) definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $(x,z) \mapsto \varphi(x,z)$ tale che $\varphi(0,0) = 0$.

3. Si provi che la funzione implicita φ ha in $(0,0)$ un punto di sella.

Svolgimento

2. Detta $g(x,y,z) = e^z - z - x \operatorname{sen} y + (y+1)\cos x$, si osservi che $g(0,0,0) = 2$ e

$$\partial_y g(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = -x\cos y + \cos x\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 1 \neq 0\,.$$

   Poiché g è di classe $\mathcal{C}^\infty$, il teorema di Dini assicura l'esistenza della funzione implicita $(x,z) \mapsto \varphi(x,z)$ richiesta, che eredita la stessa regolarità di g.

3. Per provare che φ ha un punto di sella in $(0,0)$ dobbiamo dimostrare che $(0,0)$ è punto stazionario per φ e che in tale punto la matrice hessiana di φ è indefinita. Le derivate di φ si scrivono

$$\partial_x\varphi(0,0) = -\frac{\partial_x g(0,0,0)}{\partial_y g(0,0,0)}\,, \qquad \partial_z\varphi(0,0) = -\frac{\partial_z g(0,0,0)}{\partial_y g(0,0,0)}\,.$$

   Poiché

$$\partial_x g(x,y,z) = -\operatorname{sen} y - (y+1)\operatorname{sen} x\,, \qquad \partial_z g(x,y,z) = e^z - 1\,,$$

   si ottiene $\partial_x g(0,0,0) = \partial_z g(0,0,0) = 0$, e quindi $\partial_x\varphi(0,0) = \partial_z\varphi(0,0) = 0$, come si voleva. Riguardo alle derivate seconde, si ha

$$\partial^2_{xx}\varphi(0,0,0) = -\frac{\partial^2_{xx} g(0,0,0)}{\partial_y g(0,0,0)}\,, \qquad \partial^2_{xz}\varphi(0,0,0) = -\frac{\partial^2_{xz} g(0,0,0)}{\partial_y g(0,0,0)}$$
$$\partial^2_{zz}\varphi(0,0,0) = -\frac{\partial^2_{zz} g(0,0,0)}{\partial_y g(0,0,0)}\,.$$

   Poiché

$$\partial^2_{xx} g(x,y,z) = -(y+1)\cos x\,, \quad \partial^2_{xz} g(x,y,z) = 0\,, \quad \partial^2_{zz} g(x,y,z) = e^z\,,$$

   si ottiene che la matrice hessiana di φ in $(0,0)$ è

$$H_\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

   che, avendo come autovalori ± 1, risulta indefinita. Ne consegue che $(0,0)$ è punto di sella per φ.

Esercizio 4

Si consideri la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 = 16 - z\,,\ z \in [0,12]\big\}\,.$$

1. Si provi che Σ è una superficie regolare.
2. Si enunci il teorema della divergenza.
3. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(y - x^3, x - y^3, 3z(x^2+y^2)\big)$$

   attraverso la superficie Σ orientata in modo che il versore normale abbia la terza componente non negativa.

Svolgimento

1. Poiché Σ è un sottoinsieme del grafico della funzione
$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto 16 - 4(x^2 + y^2)\,,$$
essa è una superficie cartesiana ed è quindi regolare.

3. Si osservi che Σ è una porzione di un paraboloide (si veda la figura 1). Essa è descritta da

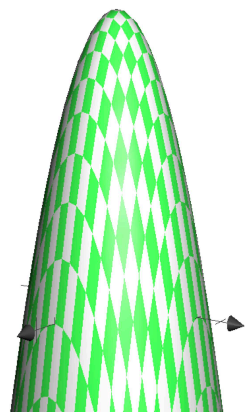

Figura 1: La superficie di equazione $4x^2 + 4y^2 = 16 - z$

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 = 16 - z\,,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

Consideriamo le due superfici cartesiane
$$\Sigma_0 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\,,\ x^2 + y^2 \le 4\right\}, \qquad \Sigma_{12} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 12\,,\ x^2 + y^2 \le 1\right\},$$
e la superficie $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_{12}$. Questa risulta chiusa, regolare a pezzi e orientabile con normale esterna concordemente a Σ, e racchiude l'insieme
$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 12]\,,\ 4(x^2 + y^2) \le 16 - z\right\},$$
che è semplice rispetto a tutti gli assi. Allora, per il teorema della divergenza, si ha
$$\Phi(\mathbf{F}, S) = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_e \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz\,.$$
Si osservi che $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$, e quindi
$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = 0\,.$$
Allora, essendo
$$0 = \Phi(\mathbf{F}, S) = \Phi(\mathbf{F}, \Sigma) + \iint_{\Sigma_0} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS + \iint_{\Sigma_{12}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS\,,$$
con un cambio di coordinate polari si ottiene che
$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iint_{\Sigma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS - \iint_{\Sigma_{12}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS = -36 \iint_{B_1(0,0)} (x^2 + y^2) \, dxdy$$
$$= -36 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho d\vartheta = -18\pi\,.$$