Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2011/2012

Terzo appello

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix} , \tag{1}$$

si determinino la matrice dei coefficienti $A(t)$ sapendo che l'integrale generale del sistema omogeneo associato nell'intervallo $]0, +\infty[$ è

$$\begin{cases} x(t) = c_2 e^t \\ y(t) = c_2 e^t + c_3 t \\ z(t) = c_1 t + c_3 e^t \, . \end{cases} \tag{2}$$

Successivamente, si calcoli la soluzione di (1) che soddisfa $x(1) = y(1) = z(1) = 0$.

Svolgimento

Da (2) si deduce che

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & t \\ t & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

è matrice risolvente del sistema in $]0, +\infty[$. Poiché $W(t)$ è soluzione di $W'(t) = A(t)W(t)$, si ricava che

$$A(t) = W'(t)[W(t)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & 1 \\ 1 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t/t^2 & -e^t/t^2 & 1/t \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ -1/t & 1/t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - 1/t & 1/t & 0 \\ e^t/t^2 - e^t/t & e^t/t - e^t/t^2 & 1/t \end{pmatrix} .$$

Per calcolare la soluzione di (1) che soddisfa le condizioni iniziali assegnate, dobbiamo procurarci una soluzione particolare di (1). Con il metodo della variazione delle costanti si trova

$$\mathbf{v}(t) = W(t) \int_1^t [W(s)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ se^{-s} \end{pmatrix} ds = W(t) \int_1^t \begin{pmatrix} e^s/s^2 & -e^s/s^2 & 1/s \\ e^{-s} & 0 & 0 \\ -1/s & 1/s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ se^{-s} \end{pmatrix} ds$$

$$= W(t) \int_1^t \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ 0 & e^t & t \\ t & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} - e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t(e^{-1} - e^{-t}) \end{pmatrix} .$$

L'integrale generale di (1) si scrive

$$\begin{cases} x(t) = c_2 e^t \\ y(t) = c_2 e^t + c_3 t \\ z(t) = c_1 t + c_3 e^t + t(e^{-1} - e^{-t}) \, . \end{cases}$$

Essendo

$$x(1) = c_2 e\,, \quad y(1) = c_2 e + c_3\,, \quad z(1) = c_1 + c_3 e\,,$$

si ottiene che devono sussistere $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è la funzione $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ sopra calcolata (come ci si poteva aspettare...).

Esercizio 2

Sia data la famiglia di superfici

$$\Sigma_{a,b} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-a^2} x^2 + e^{-b^2} y^2\,,\ e^{-2a^2} x^2 + e^{-2b^2} y^2 < 1 \right\},$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Si calcoli l'area $|\Sigma_{a,b}|$ di $\Sigma_{a,b}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Si enunci il teorema e dimostri il sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
3. Si dimostri che esiste il massimo di $|\Sigma_{a,b}|$ al variare di a, b in

$$\Gamma = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : e^{a^2} + e^{b^2} = 8 \right\}$$

   e lo si calcoli usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Svolgimento

1. $\Sigma_{a,b}$ è una superficie cartesiana, parametrizzabile con

$$(x,y) \mapsto (x, y, e^{-a^2} x^2 + e^{-b^2} y^2)\,, \qquad (x,y) \in D \doteq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-2a^2} x^2 + e^{-2b^2} y^2 < 1 \right\}.$$

   Allora, sfruttando il fatto che D è un'ellisse, con il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = e^{a^2} \rho \cos\vartheta \\ y = e^{b^2} \rho \operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]\,,$$

   si ottiene

$$\begin{aligned} \left|\Sigma_{a,b}\right| &= \iint_D \sqrt{1 + 4\left(e^{-2a^2} x^2 + e^{-2b^2} y^2\right)}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} e^{a^2+b^2} \rho\, d\rho d\vartheta \\ &= \frac{e^{a^2+b^2}}{12} \pi (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_0^1 = (5^{3/2} - 1)\, \frac{e^{a^2+b^2}}{12} \pi \end{aligned}$$

2. Lasciata al lettore.
3. Essendo $(a,b) \mapsto e^{a^2} + e^{b^2}$ funzione continua, Γ è chiuso. Inoltre, poiché deve essere

$$e^{a^2}, e^{b^2} \leq 8\,,$$

   si ha $a^2, b^2 \leq \ln 8$, da cui

$$|a|, |b| \leq \sqrt{\ln 8}\,,$$

   e quindi Γ è anche limitato. Essendo

$$(a,b) \mapsto |\Sigma_{a,b}| = (5^{3/2} - 1)\, \frac{e^{a^2+b^2}}{12} \pi$$

funzione continua, per il teorema di Weierstrass essa ha massimo in Γ. È evidente che massimizzare $|\Sigma_{a,b}|$ equivale a massimizzare $e^{a^2+b^2}$. Poiché

$$\nabla\big(e^{a^2}+e^{b^2}\big)=\big(2ae^{a^2},2be^{b^2}\big)=(0,0)\qquad\Longleftrightarrow\qquad(a,b)=(0,0)\notin\Gamma\,,$$

il vincolo è costituito di punti regolari, e quindi è possibile appplicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Bisogna trovare i punti critici di

$$\mathbb{R}^3\ni(a,b,\lambda)\mapsto e^{a^2+b^2}-\lambda\big(e^{a^2}+e^{b^2}-8\big)\,.$$

Si trova che deve essere

$$\begin{cases}2ae^{a^2+b^2}-2a\lambda e^{a^2}=0\\ 2be^{a^2+b^2}-2b\lambda e^{b^2}=0\\ e^{a^2}+e^{b^2}=8\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}a(e^{b^2}-\lambda)=0\\ b(e^{a^2}-\lambda)=0\\ e^{a^2}+e^{b^2}=8\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}a=0\quad\text{o}\quad e^{b^2}=\lambda\\ b=0\quad\text{o}\quad e^{a^2}=\lambda\\ e^{a^2}+e^{b^2}=8\,.\end{cases}$$

Allora i punti critici sono

$$(a,b,\lambda)=(0,\pm\sqrt{\ln 7},1)\,,\quad(a,b,\lambda)=(\pm\sqrt{\ln 7},0,1)\,,\quad(a,b,\lambda)=(\pm\sqrt{\ln 4},\pm\sqrt{\ln 4},4)\,.$$

Poichè

$$e^{a^2+b^2}\Big|_{(a,b)=(0,\pm\sqrt{\ln 7})}=7\,,\qquad e^{a^2+b^2}\Big|_{(a,b)=(\pm\sqrt{\ln 7},0)}=7\,,\qquad e^{a^2+b^2}\Big|_{(a,b)=(\pm\sqrt{\ln 4},\pm\sqrt{\ln 4})}=16\,,$$

si deduce che

$$\max_{(a,b)\in\Gamma}\Sigma_{a,b}=(5^{3/2}-1)\,\frac{4}{3}\pi\,.$$

Esercizio 3

Sia data l'equazione

$$ye^x+xe^y=0\,,\qquad(x,y)\in\mathbb{R}^2\,.\tag{3}$$

1. Si dia la definizione di curva regolare.
2. Si provi che (3) definisce in un intorno di $(0,0)$ una curva regolare di cui si chiede di calcolare un vettore tangente in $(0,0)$.
3. Si provi che (3) definisce in un intorno di $x=0$ una funzione $y=\varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^2$.
4. Si provi che in un intorno di $x=0$ la funzione φ è decrescente e convessa.

Svolgimento

1. Lasciata al lettore.
2. Posto $f(x,y)=ye^x+xe^y$, si ha $f(0,0)=0$ ed inoltre

$$\nabla f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\big(ye^x+e^y,e^x+xe^y\big)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=(1,1)\neq(0,0)\,,$$

da cui la conclusione per il teorema di Dini. Poiché la curva definita da (3) è una curva di livello di f, un vettore tangente $\mathbf{v}$ in $(0,0)$ deve essere ortogonale a $\nabla f(0,0)$, e quindi basta scegliere $\mathbf{v}=(-1,1)$.

3. Essendo f almeno di classe $\mathcal{C}^1$ (in verità è di classe $\mathcal{C}^\infty$) e poiché $f(0,0) = 0$ e $\partial_y f(0,0) = 1 \neq 0$, il teorema di Dini assicura l'esistenza di φ, con $\varphi(0) = 0$. Il fatto che φ sia di classe $\mathcal{C}^2$ deriva dalla regolarità di f.

4. Si ha
$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}$$
da cui
$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -1 < 0\,,$$
e quindi φ è (strettamente) decrescente in un intorno di $x = 0$. Per dimostrare la proprietà di covessità calcoliamo $\varphi''(0)$. Si ha
$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\big[\partial_y f(x,\varphi(x))\big]^2}\Big[\big[\partial^2_{xx} f(x,\varphi(x)) + \partial^2_{xy} f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big]\partial_y f(x,\varphi(x)) + \\ - \big[\partial^2_{xy} f(x,\varphi(x)) + \partial^2_{yy} f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big]\partial_x f(x,\varphi(x))\Big]\,.$$
Essendo
$$\partial^2_{xx} f(x,y) = ye^x\,, \qquad \partial^2_{xy} f(x,y) = e^x + e^y\,, \qquad \partial^2_{yy} f(x,y) = xe^y\,,$$
si ha
$$\partial^2_{xx} f(0,0) = 0\,, \qquad \partial^2_{xy} f(0,0) = 2\,, \qquad \partial^2_{yy} f(0,0) = 0\,,$$
e quindi $\varphi''(0) = 4 > 0$, da cui la convessità di φ in un intorno di $x = 0$.