Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2011/2012

Quarto appello

Esercizio 1

Dato l'insieme

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 2\,,\ x^2+y^2-z^2 < 0\,,\ z > 0 \right\},$$

lo si disegni e si calcoli

$$\iiint_S \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dxdydz\,.$$

(Sugg.: usare coordinate cilindriche)

Svolgimento

L'insieme S è rappresentato in figura 1, ed è l'interno di un tronco di cono sormontato da una calotta sferica. Con un cambio di coordinate cilindriche,

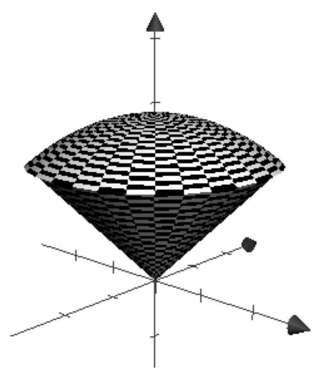

Figura 1: L'insieme S dell'esercizio 1

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z\,, \end{cases} \qquad \rho \geq 0\,, \vartheta \in [0, 2\pi[\,, z \in \mathbb{R}\,,$$

S si rappresenta con

$$S = \left\{ (\rho, \vartheta, z) : \rho \in [0,1]\,, \vartheta \in [0,2\pi[\,, z \in [\rho, \sqrt{2-\rho^2}] \right\}.$$

In questo modo l'integrale da calcolare diventa

$$\begin{aligned}
\iiint_S \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dxdydz &= \iint_{B_1(0,0)} \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2}\cdot\rho\,dz\right) d\rho d\vartheta \\
&= \iint_{B_1(0,0)} \rho(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)\cos^2\vartheta\, d\rho d\vartheta \\
&= \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \rho(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)\,d\rho\right) \\
&= -\frac{\pi}{3}\big[(2-\rho^2)^{3/2}+\rho^3\big]_0^1 = \frac{\pi}{3}(2^{3/2}-2) = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}, \frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}}\right)$$

definito nell'insieme $A = \{(x,y) \mid x+y>0\}$.

1. Dire se $\mathbf{F}$ è conservativo e in caso calcolarne il potenziale U tale che $U(1,0)=1$;
2. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ definita implicitamente da $y^2-x^2=3$, con $y>0$, $x\in[-1,1]$, e percorsa nel verso delle x crescenti.
3. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{x}{\sqrt{x+y}} \\ \ddot{y} = \dfrac{-x-2y}{\sqrt{x+y}}\,, \end{cases} \qquad x+y>0\,,$$

   se ne scriva un integrale primo.

Svolgimento

1. Poiché l'insieme A è semplicemente connesso, per verificare se $\mathbf{F}$ è conservativo è sufficiente verificare che $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, cioè

$$\partial_y\frac{x}{\sqrt{x+y}} = \partial_x\frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}}\,.$$

   Poiché

$$\partial_y\frac{x}{\sqrt{x+y}} = -\frac{1}{2}x(x+y)^{-3/2}\,,$$

   e

$$\partial_x\frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}} = -\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{2}(x+2y)(x+y)^{-3/2} = -\frac{1}{2}x(x+y)^{-3/2}\,,$$

   si ottiene che $\mathbf{F}$ è conservativo. Il potenziale U deve verificare

$$\partial_x U(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x+y}}\,, \qquad \partial_y U(x,y) = \frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}}\,. \tag{1}$$

Poiché
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+y}}\,dx = \int \left(\sqrt{x+y} - \frac{y}{\sqrt{x+y}}\right)\,dx = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y} + \varphi(y)\,,$$
con $\varphi = \varphi(y)$ generica funzione della sola y, si ha
$$U(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y} + \varphi(y)\,.$$
Inoltre, essendo
$$\partial_y \left(\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y}\right) = \frac{-x-2y}{\sqrt{x+y}}\,,$$
da (1) si ottiene che deve essere $\varphi'(y) = 0$, cioè $\varphi = \text{cost}$. Imponendo la condizione $U(1,0) = 1$, si trova $\varphi(y) = 1/3$, e quindi
$$U(x,y) = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x-2y)\sqrt{x+y} + \frac{1}{3}\,.$$

2. I punti iniziale e finale della curva sono rispettivamente $(-1,2)$ e $(1,2)$. Poiché $\mathbf{F}$ è conservativo il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è
$$\int_\gamma \mathbf{F} = U(1,2) - U(-1,2) = \frac{2}{3}3^{3/2} - 4\sqrt{3} - \frac{2}{3} + 4 = -2\sqrt{3} + \frac{10}{3}\,.$$

3. Poiché il sistema di equazioni differenziali si scrive
$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \mathbf{F}(x,y)\,,$$
ed essendo $\mathbf{F}$ un campo conservativo, il sistema ammette l'integrale dell'energia, e quindi un integrale primo è
$$E(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{|\dot{x}|^2}{2} + \frac{|\dot{y}|^2}{2} - U(x,y)\,,$$
con U potenziale di $\mathbf{F}$ calcolato sopra.

Esercizio 3

Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione
$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$
sulla superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con $R > 0$.

Svolgimento

Trovare i punti di massimo e minimo per f equivale a trovarli per la funzione
$$\varphi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$
per evidenti motivi. Poiché $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ è l'equazione di una sfera di raggio $R > 0$, il vincolo è costituito di punti regolari e quindi possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana si scrive
$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\,,$$

ed i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1-\lambda)=0 \\ 2y(2-\lambda)=0 \\ 2z(3-\lambda)=0 \\ x^2+y^2+z^2=R^2\,. \end{cases}$$

Si trova che i punti critici vincolati di φ (e quindi di f) sono

$$(\pm R,0,0)\,, \quad (0,\pm R,0)\,, \quad (0,0,\pm R)\,.$$

Poiché

$$\varphi(\pm R,0,0)=R\,, \quad \varphi(0,\pm R,0)=\sqrt{2}R\,, \quad \varphi(0,0,\pm R)=\sqrt{3}R\,,$$

si ha che $(\pm R,0,0)$ sono punti di minimo e $(0,0,\pm R)$ sono punti di massimo.

Esercizio 4

Si provi che la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\,, \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

Si noti preliminarmente che

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}\,|xy| \qquad \forall\,(x,y)\neq(0,0)\,.$$

Poiché $f(x,0)=f(0,y)\equiv 0$, si ha che f è derivabile in $(0,0)$ con $\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0$. Affinché sia anche differenziabile deve essere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)x-\partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,,$$

cioè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0\,. \tag{2}$$

Si ha

$$0\le\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{|xy|}\,.$$

Poiché banalmente vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|xy|}=0\,,$$

si deduce che (2) è vera e quindi che f è differenziabile in $(0,0)$.