Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xy)-1}{2x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Indicare nella zona sottostante:

- f è continua in $(0,0)$?
- scrivere gradiente e derivata direzionale nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:
- f è differenziabile in $(0,0)$?
- vale la formula del gradiente?

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z + x^3)\ \mathbf{i} + (xy - y^3z)\ \mathbf{j} + (y^2z^2 - xz)\ \mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le (z-4)^2\,,\ 0 \le z \le 3\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = (z-4)^2\,,\ 0 < z < 3\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D x^2\, dxdydz\,.$$
Sugg.: integrare per strati.

2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1. è:
- il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D è:
- il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2 + 2y^2 - 8 = 0$.
2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 8\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max assoluto relativi al punto 1. sono:
- i punti di min/max assoluto relativi al punto 2. sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(x \sin(x + y), \cos(x + y) + x \sin(x + y) + y\big).$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale.
2. Si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale 2 in $(x, y) = (0, \pi)$.
3. Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2 - 4x$, $x \in [-1, 2]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Indicare nella zona sottostante:

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale?
- $\mathbf{F}$ è conservativo?
- Il potenziale richiesto di $\mathbf{F}$ vale:
- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2xy) - 1}{x^2 + 3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Indicare nella zona sottostante:

- f è continua in $(0,0)$?
- scrivere gradiente e derivata direzionale nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:
- f è differenziabile in $(0,0)$?
- vale la formula del gradiente?

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z^3 - xy)\ \mathbf{i} + (y^3z^3 + y^3)\ \mathbf{j} - (y^2z^4 - yz)\ \mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (z-3)^2\,,\ 0 \leq z \leq 2\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z-3)^2\,,\ 0 < z < 2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D y^2\, dxdydz\,.$$
Sugg.: integrare per strati.

2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1. è:
- il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D è:
- il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione $f(x, y) = 2x^2 + 8y^2 - 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2 + 8y^2 - 8 = 0$.
2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8y^2 \leq 8\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max assoluto relativi al punto 1. sono:
- i punti di min/max assoluto relativi al punto 2. sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(x \sin(x + 2y), 2\cos(x + 2y) + 2x \sin(x + 2y) + y\big).$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale.
2. Si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale -1 in $(x, y) = (\pi, 0)$.
3. Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2 - 3x$, $x \in [1, 3]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Indicare nella zona sottostante:

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale?
- $\mathbf{F}$ è conservativo?
- Il potenziale richiesto di $\mathbf{F}$ vale:
- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3xy)}{2x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Indicare nella zona sottostante:

- f è continua in $(0,0)$?
- scrivere gradiente e derivata direzionale nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:
- f è differenziabile in $(0,0)$?
- vale la formula del gradiente?

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z + 2xy)\ \mathbf{i} - (y^3z + y^2)\ \mathbf{j} + (y^2z^2 + 2y^2z)\ \mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (z-4)^2\,,\ 0 \leq z \leq 2\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z-4)^2\,,\ 0 < z < 2\right\}.$$

1. Calcolare

$$\iiint_D y^2\, dxdydz\,.$$

Sugg.: integrare per strati.

2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.

3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1. è:
- il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D è:
- il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione $f(x,y) = 2x^2 + 20y^2 - 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2 + 18y^2 - 8 = 0$.

2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 18y^2 \leq 8\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max assoluto relativi al punto 1. sono:
- i punti di min/max assoluto relativi al punto 2. sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(4x\sin(2x+y), \cos(2x+y) + 2x\sin(2x+y) + y\big).$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

2. Si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale 1 in $(x,y) = (-\pi,\pi)$.

3. Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = 2x^2 - x$, $x \in [-1,2]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Indicare nella zona sottostante:

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale?
- $\mathbf{F}$ è conservativo?
- Il potenziale richiesto di $\mathbf{F}$ vale:
- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2xy)}{2x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Indicare nella zona sottostante:

- f è continua in $(0,0)$?
- scrivere gradiente e derivata direzionale nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:
- f è differenziabile in $(0,0)$?
- vale la formula del gradiente?

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y^2z^3 - 2x^3z^2)\,\mathbf{i} + (2xy^3z^3 + 3x^2y)\,\mathbf{j} + (2x^2z^3 - 2xy^2z^4)\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq (z-3)^2\,,\ 0 \leq z \leq 1\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = (z-3)^2\,,\ 0 < z < 1\right\}.$$

1. Calcolare

$$\iiint_D x^2\,dxdydz\,.$$

   Sugg.: integrare per strati.

2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1. è:
- il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D è:
- il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione $f(x, y) = 2x^2 + 50y^2 - 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2 + 32y^2 - 8 = 0$.
2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 32y^2 \leq 8\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max assoluto relativi al punto 1. sono:
- i punti di min/max assoluto relativi al punto 2. sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(4x \sin(2x + 3y), 3 \cos(2x + 3y) + 6x \sin(2x + 3y) + y\big).$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale.
2. Si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale -2 in $(x, y) = (\pi/2, 0)$.
3. Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = 2x^2 - 4x$, $x \in [-2, 1]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Indicare nella zona sottostante:

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale?
- $\mathbf{F}$ è conservativo?
- Il potenziale richiesto di $\mathbf{F}$ vale:
- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$