Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 14/02/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si provi che $\mathbf{W}(t)$ è in $\mathbb{R}$ la matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
di cui si chiede di calcolare la matrice $A(t)$.
2. Si scriva l'integrale generale del sistema del primo ordine non omogeneo
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^{2t} \\ -e^t(t^2 + e^{2t}) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$
3. Si calcoli la soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- La matrice $A(t)$ è:
- L'integrale generale del sistema $(*)$ è:
- La soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ è:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = xe^y + y - 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(0, 1)$ una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = 1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $x = 0$ g è crescente/decrescente:
- in un intorno di $x = 0$ g è convessa/concava:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-2y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(-4,-2)$, $(4,-2)$ e $(0,2)$.

1. Determinare i punti di estremo relativo di f interni a T.
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti interni di min/max relativo interni ad T sono:
- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \le \pi + 1\big\}\,,$$

la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) : z = \sin(4x^2+9y^2-1)\,,\ (x,y) \in D\big\}\,,$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}} \arctan \frac{3y}{\sqrt{4x^2+1}}\ \mathbf{i} + \big[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\big]\ \mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{4x^2+9y^2+1}\,dxdy\,.$$
2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: si osservi che $\partial\Sigma = \big\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \partial D\big\}$.

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:
- Il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 14/02/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la matrice
$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2t \\ -2t & e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si provi che $\mathbf{W}(t)$ è in $\mathbb{R}$ la matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
di cui si chiede di calcolare la matrice $A(t)$.
2. Si scriva l'integrale generale del sistema del primo ordine non omogeneo
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} + 4t^2 \\ -e^t(e^{2t} + 4t^2) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$
3. Si calcoli la soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Indicare nella zona sottostante:

- La matrice $A(t)$ è:
- L'integrale generale del sistema $(*)$ è:
- La soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ è:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione
$$f(x, y) = xe^y - y - 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(0, -1)$ una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = -1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $x = 0$ g è crescente/decrescente:
- in un intorno di $x = 0$ g è convessa/concava:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x^2-y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(-4,-2)$, $(4,-2)$ e $(0,2)$.

1. Determinare i punti di estremo relativo di f interni a T.

2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti interni di min/max relativo interni ad T sono:

- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 2\pi + 1\right\}\,,$$

la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(x^2 + 4y^2 - 1)\,,\ (x,y) \in D\right\}\,,$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \arctan \frac{2y}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\right]\ \mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{x^2+4y^2+1}\,dxdy\,.$$

2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: si osservi che $\partial\Sigma = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \partial D\right\}$.

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:

- Il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 14/02/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t \\ -t & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si provi che $\mathbf{W}(t)$ è in $\mathbb{R}$ la matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
di cui si chiede di calcolare la matrice $A(t)$.
2. Si scriva l'integrale generale del sistema del primo ordine non omogeneo
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t(t^2 + e^{4t}) \\ t^2 + e^{4t} \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$
3. Si calcoli la soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Indicare nella zona sottostante:

- La matrice $A(t)$ è:
- L'integrale generale del sistema $(*)$ è:
- La soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ è:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = ye^x + x - 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(1, 0)$ una funzione $x = g(y)$ tale che $g(0) = 1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $y = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $y = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $y = 0$ g è crescente/decrescente:
- in un intorno di $y = 0$ g è convessa/concava:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-3y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(-4,-2)$, $(4,-2)$ e $(0,2)$.

1. Determinare i punti di estremo relativo di f interni a T.

2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti interni di min/max relativo interni ad T sono:

- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq \pi + 1\right\},$$

la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(9x^2 + 4y^2 - 1)\,,\ (x,y) \in D\right\},$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{9x^2+1}} \arctan \frac{2y}{\sqrt{9x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\right]\ \mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli

$$\iint_D \frac{x^2}{9x^2+4y^2+1}\,dxdy\,.$$

2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: si osservi che $\partial\Sigma = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \partial D\right\}$.

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:

- Il flusso di rot $\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 14/02/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2t \\ -2t & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si provi che $\mathbf{W}(t)$ è in $\mathbb{R}$ la matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
di cui si chiede di calcolare la matrice $A(t)$.
2. Si scriva l'integrale generale del sistema del primo ordine non omogeneo
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (e^{4t} + 4t^2)e^t \\ e^{4t} + 4t^2 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$
3. Si calcoli la soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- La matrice $A(t)$ è:
- L'integrale generale del sistema $(*)$ è:
- La soluzione di $(*)$ che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ è:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = ye^x - x - 1, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(-1, 0)$ una funzione $x = g(y)$ tale che $g(0) = -1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $y = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $y = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $y = 0$ g è crescente/decrescente:
- in un intorno di $y = 0$ g è convessa/concava:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x,y) = (x+y)e^{-3x^2-y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(-4,-2)$, $(4,-2)$ e $(0,2)$.

1. Determinare i punti di estremo relativo di f interni a T.

2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti interni di min/max relativo interni ad T sono:

- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 2\pi + 1\right\},$$

la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(4x^2 + y^2 - 1)\,,\ (x,y) \in D\right\},$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y \ln(z^2 + y^2 + 1) - \cos(zy)\right]\ \mathbf{j} + e^{xyz^2} \sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{4x^2 + y^2 + 1}\, dxdy\,.$$

2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: si osservi che $\partial\Sigma = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \partial D\right\}$.

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:

- Il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso Σ vale: