

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN, 16/09/13

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Parte di esercizi

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data l'equazione

$$x^2 + \ln(1 + xy) + ye^{2y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (*)$$

1. Provare che (*) definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una sola funzione $y = f(x)$.
2. Verificare che $x = 0$ è un punto critico per f e stabilirne la natura.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore di $\partial_y g(0, 0)$, dove $g(x, y) = x^2 + \ln(1 + xy) + ye^{2y}$:
- la natura di $x = 0$ come punto critico di f :

Esercizio 2 [6 punti]

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:
- l'integrale generale dell'equazione data:
- la soluzione del problema di Cauchy:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = y^3 + 4x^2y - 12y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Provare che f ha massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2y^2 \leq 7\}.$$

2. Stabilire la natura dei punti critici di f interni a D .
3. Calcolare massimo e minimo assoluti di f in D .

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici di f interni a D :
- la natura dei punti critici di f interni a D :
- i punti di massimo e minimo assoluti di f in D :
- i valori di massimo e minimo assoluti di f in D :

Esercizio 4 [6 punti]

Calcolare

$$\iiint_D x^2(2-z) \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale da calcolare: