Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2012/2013

Primo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xy)-1}{2x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Svolgimento

1. Poiché
$$\cos(xy) - 1 = -\frac{1}{2}x^2y^2 + o(x^2y^2)\,,$$
si ha
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2+3y^2}\,. \tag{1}$$
Essendo $2x^2+3y^2 \geq x^2+y^2$, si ottiene
$$0 \leq \frac{x^2y^2}{2x^2+3y^2} \leq |xy|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|xy| \to 0$$
per $(x,y) \to (0,0)$. Con il teorema dei due carabinieri si conclude che il limite (1) vale 0), e dunque f è continua in $(0,0)$.

2. Si ha $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$, e quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Quanto alle derivate direzionali, se $\mathbf{v} = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, si ottiene
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\mathbf{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t^2\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta)-1}{t^3(2\cos^2\vartheta + 3\operatorname{sen}^2\vartheta)} \\ &= \lim_{t\to 0} t\frac{\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}{2\cos^2\vartheta + 3\operatorname{sen}^2\vartheta} = 0\,. \end{aligned}$$

3. Si ha
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\partial_x f(0,0) - y\partial_y f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{\sqrt{x^2+y^2}(2x^2+y^2)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(2x^2+y^2)} \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché

$$0 \le \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(2x^2+3y^2)} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{|xy|} \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$. Si deduce che il limite (2) vale 0 e quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

4. Essendo f differenziabile, vale la formula del gradiente.

Esercizio 2

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z + x^3)\,\mathbf{i} + (xy - y^3z)\,\mathbf{j} + (y^2z^2 - xz)\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le (z-4)^2\,,\ 0 \le z \le 3\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = (z-4)^2\,,\ 0 < z < 3\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D x^2\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Svolgimento

1. Integrando per strati e passando in coordinate polari si ottiene
$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\,dxdydz &= \int_0^3 \left(\iint_{B_{|z-4|}} x^2\,dxdy\right) dz = \int_0^3 \left(\int_0^{|z-4|}\int_0^{2\pi} \rho^3\cos^2\vartheta\,d\vartheta d\rho\right)\\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^3 \rho^4\Big|_0^{|z-4|} dz = \frac{\pi}{4}\int_0^3 (z-4)^4\,dz = \frac{\pi}{20}(z-4)^5\Big|_0^3\\ &= \frac{\pi}{20}\big(4^5-1\big)\,.\end{aligned}$$
2. Poiché
$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2\,,$$
usando il teorema della divergenza si ottiene
$$\mathbf{\Phi}_{\partial D}(\mathbf{F}) = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz = 3\iiint_D x^2\,dxdydz = \frac{3\pi}{20}\big(4^5-1\big)\,.$$
3. Siano
$$\Sigma_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4^2\,,\ z=0\right\}, \qquad \Sigma_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\,,\ z=3\right\},$$
orientate in modo che il versore normale coincida con $-\mathbf{k}$ per Σ_0 e con $\mathbf{k}$ per Σ_3. Allora
$$\partial D = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_3\,,$$

e quindi, applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\mathbf{\Phi}_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydz - \mathbf{\Phi}_{\Sigma_0}(\mathbf{F}) - \mathbf{\Phi}_{\Sigma_3}(\mathbf{F})\,.$$

Si ha

$$\mathbf{\Phi}_{\Sigma_0}(\mathbf{F}) = -\iint_{B_4(0,0)} \mathbf{F}(x,y,0)\cdot\mathbf{k}\,dxdy = 0\,,$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_{\Sigma_3}(\mathbf{F}) &= \iint_{B_1(0,0)} \mathbf{F}(x,y,3)\cdot\mathbf{k}\,dxdy = \iint_{B_1(0,0)} (9y^2-3x)\,dxdy \\ &= 9\iint_{B_1(0,0)} y^2\,dxdy = 9\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta d\rho = \frac{9}{4}\pi\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\mathbf{\Phi}_\Sigma(\mathbf{F}) = \frac{3\pi}{20}\big(4^5-1\big) - \frac{9}{4}\pi = \frac{48\pi}{20}\big(4^3-1\big)\,.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2+2y^2-8=0$.

2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \le 8\right\}.$$

Svolgimento

1. Il vincolo è un'ellisse e quindi è un insieme chiuso e limitato. Il teorema di Weierstrass assicura esistenza del massimo e del minimo di f, essendo questa continua. Poiché il vincolo è (banalmente) regolare, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange troviamo i punti critici vincolati. Detto $\lambda\in\mathbb{R}$ il moltiplicatore, si trova che devono essere verificate

$$\begin{cases} 4x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 8\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che deve essere $x=0$ o $\lambda = 2$. Se $x=0$, si ottiene $y=\pm 2$ e λ di conseguenza. Se $\lambda=2$, dalla seconda equazione si ricava $y=-1/3$ e $x=\pm\sqrt{70}/3$. Quindi i punti critici vincolati sono $(0,\pm 2)$ e $(\pm\sqrt{70}/3, -1/3)$. Poiché

$$f(0,-2) = 8\,, \qquad f(0,2) = 0\,, \qquad f(\pm\sqrt{70}/3,-1/3) = \frac{146}{9}\,,$$

si trova che $(0,2)$ è punto di minimo e $(\pm\sqrt{70}/3,-1/3)$ sono punti di massimo.

2. Essendo D chiuso e limitato (è l'insieme racchiuso da un'ellisse) f ha massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. Per calcolarli, troviamo i punti critici di f all'interno

di D e i punti critici vincolati su ∂D. Osservato che questi ultimi coincidono con quelli di cui al punto 1, i punti critici interni devono soddisfare

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 < 8\,. \end{cases}$$

L'unico punto che si trova è $(0,1)$, e vale $f(0,1) = -1$. Allora $(0,1)$ è punto di minimo e $(\pm\sqrt{70}/3, -1/3)$ sono punti di massimo.

Esercizio 4

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(x \operatorname{sen}(x+y), \cos(x+y) + x \operatorname{sen}(x+y) + y\big)\,.$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale;
2. si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale 2 in $(x,y) = (0,\pi)$;
3. si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2 - 4x$, $x \in [-1,2]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Svolgimento

1. Essendo

   $$\partial_x\big[\cos(x+y) + x \operatorname{sen}(x+y) + y\big] = x\cos(x+y) = \partial_y\big[x \operatorname{sen}(x+y)\big]\,,$$

   $\mathbf{F}$ risulta irrotazionale.

2. Poiché $\mathbf{F}$ è definito in $\mathbb{R}^2$, insieme semplicemente connesso, essendo irrotazionale è anche conservativo. Un potenziale U deve soddisfare

   $$\begin{cases} \partial_x U = x \operatorname{sen}(x+y) \\ \partial_y U = \cos(x+y) + x \operatorname{sen}(x+y) + y\,. \end{cases}$$

   Integrando in y la seconda equazione si trova

   $$U(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - x\cos(x+y) + y^2/2 + C(x)\,.$$

   Derivando rispetto ad x ed imponendo che il risultato sia uguale a $x \operatorname{sen}(x+y)$, si trova $C'(x) = 0$, da cui $C(x) = c \in \mathbb{R}$, e quindi

   $$U(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - x\cos(x+y) + y^2/2 + c\,.$$

   Poiché deve essere $U(0,\pi) = 2$, si ha

   $$\operatorname{sen}\pi + \pi^2/2 + c = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2 - \pi^2/2\,,$$

   da cui

   $$U(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - x\cos(x+y) + y^2/2 + 2 - \pi^2/2\,.$$

3. Essendo $\mathbf{F}$ conservativo si ha

   $$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(2,-4) - U(-1,5) = -\operatorname{sen}2 - 2\cos 2 - \operatorname{sen}4 - \cos 4 - 9/2$$