

Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2012/2013

Secondo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data la matrice

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Si provi che $\mathbf{W}(t)$ è in $\mathbb{R}$ la matrice wronskiana di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

di cui si chiede di calcolare la matrice $A(t)$.

2. Si scriva l'integrale generale del sistema del primo ordine non omogeneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^{2t} \\ -e^t(t^2 + e^{2t}) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

3. Si calcoli la soluzione di (1) che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Svolgimento

1. Essendo $\det \mathbf{W}(t) = e^{2t} + t^2 \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{W}$ è matrice risolvente di un sistema di equazioni differenziali lineari la cui matrice $A(t)$ è data da $A(t) = \mathbf{W}'(t)[\mathbf{W}(t)]^{-1}$. Poiché

$$[\mathbf{W}(t)]^{-1} = \frac{1}{e^{2t} + t^2} \begin{pmatrix} e^t & -t \\ t & e^t \end{pmatrix},$$

si ha

$$A(t) = \frac{1}{e^{2t} + t^2} \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & -t \\ t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t} + t}{e^{2t} + t^2} & \frac{e^t(1-t)}{e^{2t} + t^2} \\ \frac{e^t(t-1)}{e^{2t} + t^2} & \frac{e^{2t} + t}{e^{2t} + t^2} \end{pmatrix}.$$

2. L'integrale generale è dato da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t),$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ è una soluzione particolare di (1) che possiamo calcolare con il metodo della variazione delle costanti. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{W}(t) \int_0^t [\mathbf{W}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} s^2 + e^{2s} \\ -e^s(s^2 + e^{2s}) \end{pmatrix} ds = \mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^s & -s \\ s & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^s + se^s \\ s - e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t & t \\ -t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t \\ t^2/2 - e^{2t}/2 + 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} te^{2t}/2 + t^3/2 + t/2 \\ -t^2e^t/2 - e^{3t}/2 + e^t/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'integrale generale si scrive

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 t + t e^{2t}/2 + t^3/2 + t/2, \\ y(t) = -c_1 t + c_2 e^t - t^2 e^t/2 - e^{3t}/2 + e^t/2. \end{cases} \quad (2)$$

3. Sfruttando le condizioni iniziali in (2) si ottiene

$$x(0) = c_1 = 1, \quad y(0) = c_2 = 0,$$

e quindi la soluzione cercata è

$$\begin{cases} x(t) = e^t + t e^{2t}/2 + t^3/2 + t/2, \\ y(t) = -t - t^2 e^t/2 - e^{3t}/2 + e^t/2. \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x, y) = x e^y + y - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(0, 1)$ una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = 1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Svolgimento

1. Poiché f è di classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0, 1) = 0$ e $\partial_y f(x, y) = x e^y + 1$, cosicché $\partial_y f(0, 1) = 1$, il teorema di Dini ci assicura l'esistenza di g .
2. Poiché f è $\mathcal{C}^\infty$, tale è anche g . Sempre dal teorema di Dini si ha

$$g'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 1)}{\partial_y f(0, 1)} = -\frac{e^y}{x e^y + 1} \Big|_{(x, y) = (0, 1)} = -e < 0,$$

e quindi g è decrescente in un intorno di $x = 0$.

3. Da

$$g'(x) \partial_y f(x, g(x)) + \partial_x f(x, g(x)) = 0,$$

derivando si ottiene

$$g''(x) \partial_y f(x, g(x)) + 2g'(x) \partial_{xy}^2 f(x, g(x)) + \partial_{yy}^2 f(x, g(x)) [g'(x)]^2 = 0,$$

da cui

$$g''(0) = -\frac{2g'(0) \partial_{xy}^2 f(0, 1) + \partial_{yy}^2 f(0, 1) [g'(0)]^2}{\partial_y f(0, 1)} = 2e^2 > 0,$$

e quindi g è convessa in un intorno di $x = 0$.

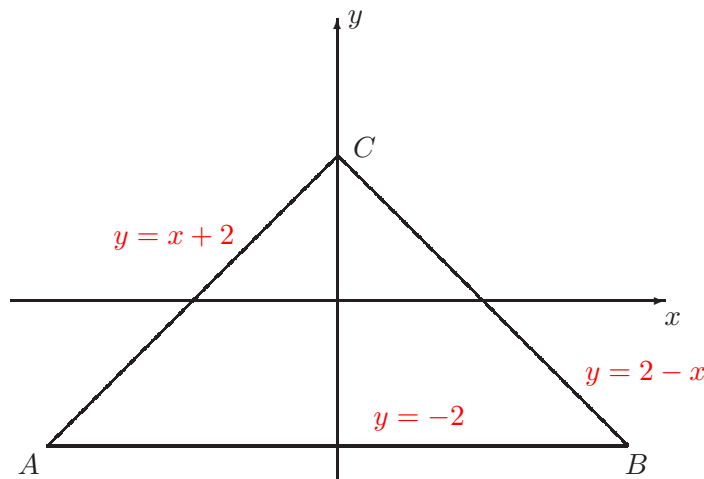


Figura 1: Il triangolo T

Esercizio 3

Siano dati la funzione

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - 2y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(-4, -2)$, $(4, -2)$ e $(0, 2)$.

1. Determinare i punti di estremo relativo di f interni a T .
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T .

Svolgimento

In figura 1 è rappresentato il triangolo T di vertici $A = (-4, -2)$, $B = (4, -2)$ e $C = (0, 2)$. In rosso sono riportate le equazioni delle rette su cui giacciono i lati di T .

1. Cerchiamo i punti critici di f interni a T . Si ha

$$\partial_x f(x, y) = e^{-x^2 - 2y^2} [1 - 2x(x + y)], \quad \partial_y f(x, y) = e^{-x^2 - 2y^2} [1 - 4y(x + y)],$$

e quindi deve essere

$$\begin{cases} 1 - 2x(x + y) = 0 \\ 1 - 4y(x + y) = 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x(x + y) = 4y(x + y) \\ 1 - 4y(x + y) = 0. \end{cases}$$

Non potendo essere $x + y = 0$, altrimenti nella seconda equazione otterremmo $1 = 0$, si ha $x = 2y$, che sostituita nella seconda equazione porta a

$$12y^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

I punti critici di f sono quindi

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right),$$

che si verifica facilmente essere entrambi interni a T . Per studiarne la natura, calcoliamo la matrice hessiana di f . Si ha

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2 f(x, y) &= -2xe^{-x^2-2y^2} [1 - 2x(x+y)] - e^{-x^2-2y^2} (4x+2y), \\ \partial_{xy}^2 f(x, y) &= -4ye^{-x^2-2y^2} [1 - 2x(x+y)] - 2xe^{-x^2-2y^2}, \\ \partial_{yy}^2 f(x, y) &= -4ye^{-x^2-2y^2} [1 - 4y(x+y)] - e^{-x^2-2y^2} (4x+8y),\end{aligned}$$

da cui

$$H_f(-1\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3}) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} & 8/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

che è definita positiva, e

$$H_f(1\sqrt{3}, 1/2\sqrt{3}) = -e^{-1/2} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} & 8/\sqrt{3} \end{pmatrix} = -H_f(-1\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3}),$$

che è definita negativa. Allora $(-1\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3})$ è punto di minimo locale, mentre $(1\sqrt{3}, 1/2\sqrt{3})$ è punto di massimo locale.

2. I candidati punti di massimo e minimo sono

- (a) i punti critici interni al triangolo, che abbiamo già calcolato;
- (b) i vertici A , B e C del triangolo;
- (c) i punti critici vincolati ai lati di T .

Per trovare questi ultimi consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned}\varphi_{AB}(x) &= f(x, -2) = (x-2)e^{-x^2-8}, & x \in]-4, 4[, \\ \varphi_{BC}(x) &= f(x, 2-x) = 2e^{-x^2-2(x-2)^2}, & x \in]0, 4[, \\ \varphi_{AC}(x) &= f(x, x+2) = 2(x+1)e^{-x^2-2(x+2)^2}, & x \in]-4, 0[,\end{aligned}$$

che sono le restrizioni di f ai lati AB , BC e AC , rispettivamente. Calcoliamo i punti critici delle tre funzioni. Derivando si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi'_{AB}(x) &= -e^{-x^2-8}(2x^2 - 4x - 1), \\ \varphi'_{BC}(x) &= -2e^{-x^2-2(x-2)^2}(6x - 8), \\ \varphi'_{AC}(x) &= -2e^{-x^2-2(x+2)^2}(6x^2 + 14x + 7).\end{aligned}$$

Si ha $\varphi'_{AB}(x) = 0$, $x \in]-4, 4[$, se e solo se $x = (2 \pm \sqrt{6})/2$ e quindi

$$\left(\frac{2 - \sqrt{6}}{2}, -2 \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{2 + \sqrt{6}}{2}, -2 \right)$$

sono i punti critici di f vincolati al lato AB . Poi, $\varphi'_{BC}(x) = 0$, $x \in]0, 4[$, se e solo se $x = 4/3$ e quindi $(4/3, 2/3)$ è l'unico punto critico vincolato al lato BC . Da ultimo $\varphi'_{AC}(x) = 0$, $x \in]-4, 0[$, se e solo se $x = (-7 \pm \sqrt{7})/6$, e quindi

$$\left(\frac{-7 - \sqrt{7}}{6}, \frac{12 - \sqrt{7}}{6} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{-7 + \sqrt{7}}{6}, \frac{5 + \sqrt{7}}{6} \right)$$

sono i punti critici di f vincolati al lato AC . Calcolando f nei punti critici interni a T , nei vertici A , B , C e nei punti critici vincolati, e confrontando tra loro i valori ottenuti si trova che

$$\max_{(x,y) \in T} f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \min_{(x,y) \in T} f(x,y) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),$$

e quindi $(1/\sqrt{3}, 1/2\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3}, -1/2\sqrt{3})$ sono rispettivamente punti di massimo e minimo assoluti di f in T .

Esercizio 4

Si considerino l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq \pi + 1\},$$

la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : z = \text{sen}(4x^2 + 9y^2 - 1), (x, y) \in D\},$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \arctan \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 1}} \mathbf{i} + [y \ln(z^2 + y^2 + 1) - \cos(zy)] \mathbf{j} + e^{xyz^2} \text{sen}(xyz^2) \mathbf{k}.$$

1. Si calcoli

$$\iint_D \frac{x^2}{4x^2 + 9y^2 + 1} dx dy.$$

2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

Svolgimento

1. Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} x = (\rho/2) \cos \vartheta \\ y = (\rho/3) \text{sen } \vartheta, \end{cases}$$

il cui determinante jacobiano è $\rho/6$, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{4x^2 + 9y^2 + 1} dx dy &= \frac{1}{24} \iint_{[0, \sqrt{\pi+1}] \times [0, 2\pi]} \frac{\rho^3 \cos^2 \vartheta}{\rho^2 + 1} d\rho d\vartheta \\ &= \frac{1}{24} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_0^{\sqrt{\pi+1}} \rho - \frac{\rho}{\rho^2 + 1} d\rho \right) \\ &= \frac{\pi}{48} [\rho - \ln(\rho^2 + 1)]_0^{\sqrt{\pi+1}} = \frac{\pi}{48} [\pi + 1 - \ln(\pi + 2)]. \end{aligned}$$

2. Sia

$$\Sigma_0 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

orientata con versore normale $\mathbf{k}$. Allora $\partial \Sigma_0 = \partial \Sigma$ e grazie al teorema del rotore si ottiene

$$\Phi_{\Sigma}(\text{rot } \mathbf{F}) = \oint_{\partial+\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial+\Sigma_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi_{\Sigma_0}(\text{rot } \mathbf{F}).$$

Poiché

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -\partial_y \left(\frac{x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \arctan \frac{3y}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right) = -\frac{3x^2}{4x^2 + 9y^2 + 1},$$

si ha

$$\Phi_{\Sigma_0}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \iint_{\Sigma_0} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dS = -3 \iint_D \frac{x^2}{4x^2 + 9y^2 + 1} \, dxdy = -\frac{\pi}{16} [\pi + 1 - \ln(\pi + 2)] .$$