Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2012/2013

Terzo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \ln(y^2+1) = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolarne i valori utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Svolgimento

1. L'insieme Γ è chiuso perché la funzione

   $$\varphi(x,y) = x^2 + \ln(y^2+1)\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

   è continua e $\Gamma = \varphi^{-1}(\{1\})$. Inoltre, poiché $x^2 \geq 0$ ed anche $\ln(y^2+1) \geq 0$, se $(x,y) \in \Gamma$ si ha

   $$x^2 \leq 1\,, \qquad \ln(y^2+1) \leq 1\,,$$

   da cui si ricava $|x| \leq 1$ e $|y| \leq \sqrt{e-1}$. Allora Γ è anche limitato, e quindi f ha massimo e minimo in Γ per il teorema di Weierstrass, essendo una funzione continua.

2. Si noti che

   $$\nabla\varphi(x,y) = \big(2x, 2y/(y^2+1)\big) \neq (0,0) \qquad \forall\,(x,y) \in \Gamma\,,$$

   e quindi Γ è vincolo regolare. Impostando il sistema con i moltiplicatori di Lagrange si ottiene che deve valere

   $$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - \dfrac{2\lambda y}{y^2+1} = 0 \\ x^2 + \ln(y^2+1) = 1\,. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad \lambda = 1 \\ 2y\left(1 - \dfrac{\lambda}{y^2+1}\right) = 0 \\ x^2 + \ln(y^2+1) = 1\,. \end{cases}$$

   Se $x = 0$, dall'ultima equazione si ottiene $y^2+1 = e$, e quindi $y = \pm\sqrt{e-1}$ e $\lambda = e$. Se $\lambda = 1$, dalla seconda equazione si ricava $y = 0$, e quindi $x = \pm 1$ dalla terza. Allora i punti critici di f vincolati a Γ sono

   $$(0, \pm\sqrt{e-1})\,, \qquad (\pm 1, 0)\,,$$

   e poiché $f(0,\pm\sqrt{e-1}) = e-1$ e $f(\pm 1, 0) = 1$, risulta che che $e-1$ è il valore massimo cercato e 1 il valore minimo.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{2x}{z-x^2-y^2}\mathbf{i} - \frac{2y}{z-x^2-y^2}\mathbf{j} + \frac{1}{z-x^2-y^2}\mathbf{k}\,, \qquad z > x^2+y^2\,.$$

1. Si provi che è conservativo e se ne calcoli il potenziale U tale che $U(0,0,1)=0$.
2. Si calcoli
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,,$$
dove γ è la curva parametrizzata da
$$\mathbf{r}(t) = t^2 e^{\operatorname{sen} t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \big(t^4 e^{2\operatorname{sen} t} + \cos^2 t + 1\big)\mathbf{k}\,, \qquad t\in[0,2\pi]\,.$$
3. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$$
attraverso la superficie
$$\Sigma = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-4)^2 = 1\,,\ y>0\big\}\,,$$
orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ soddisfi $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} > 0$.

Svolgimento

1. Osserviamo che l'insieme
$$\Omega = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z > x^2+y^2\big\}\,,$$
è un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^3$, essendo la funzione
$$\varphi(x,y,z) = z-x^2-y^2\,, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$
continua e $\Omega = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$ la parte di spazio sovrastante il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$. Poiché $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in Ω, ne consegue che per provare che $\mathbf{F}$ è conservativo è sufficiente verificare che è irrotazionale, e questo segue dal fatto che
$$\begin{aligned}
\partial_y\left(-\frac{2x}{z-x^2-y^2}\right) &= -\frac{4xy}{(z-x^2-y^2)^2} = \partial_x\left(-\frac{2y}{z-x^2-y^2}\right)\,,\\
\partial_z\left(-\frac{2x}{z-x^2-y^2}\right) &= \frac{2x}{(z-x^2-y^2)^2} = \partial_x\left(\frac{1}{z-x^2-y^2}\right)\,,\\
\partial_z\left(-\frac{2y}{z-x^2-y^2}\right) &= \frac{2y}{(z-x^2-y^2)^2} = \partial_y\left(\frac{1}{z-x^2-y^2}\right)\,.
\end{aligned}$$
Per calcolare il potenziale U, osserviamo che devono essere verificate
$$\begin{cases}
\partial_x U = -\dfrac{2x}{z-x^2-y^2}\\
\partial_y U = -\dfrac{2y}{z-x^2-y^2}\\
\partial_z U = \dfrac{1}{z-x^2-y^2}\,.
\end{cases}$$

Dalla prima si ricava che

$$U(x,y,z) = \ln(z - x^2 - y^2) + C(y,z)\,,$$

e quindi

$$\partial_y U = -\frac{2y}{z - x^2 - y^2} + \partial_y C(y,z)\,, \qquad \partial_z U = \frac{1}{z - x^2 - y^2} + \partial_z C(y,z)\,.$$

da cui $C(y,z) = c$, costante reale. Poiché deve essere $U(0,0,1) = 0$, si ricava che $c = 0$ e quindi

$$U(x,y,z) = \ln(z - x^2 - y^2)\,.$$

2. Osserviamo preliminarmente che, poiché

$$t^4 e^{2\,\mathrm{sen}\,t} + \cos^2 t + 1 = (t^2 e^{\mathrm{sen}\,t})^2 + (\cos t)^2 + 1 > (t^2 e^{\mathrm{sen}\,t})^2 + (\cos t)^2\,,$$

il supporto di γ è interamente contenuto in Ω. Essendo $\mathbf{F}$ conservativo, si ha allora

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(2\pi)) - U(\mathbf{r}(0)) = U(4\pi^2, 1, 16\pi^4 + 2) - U(0,1,2) = 0\,.$$

3. Essendo $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$, si ha

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{G}(x,y,z) = \mathrm{rot}(z\mathbf{i} - x\mathbf{k}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 0 & -x \end{pmatrix} = 2\mathbf{j}\,.$$

Si osservi che Σ è una superficie semisferica di centro $(0,0,4)$ e raggio 1, il cui bordo è la circonferenza

$$\gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\,,\ x^2 + (z-4)^2 = 1\right\},$$

che ha centro $(0,0,4)$, raggio 1 e giace sul piano xz. Grazie al teorema del rotore si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}) = \int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

dove $\mathbf{r}$ è una parametrizzazione di γ che percorra la curva una volta in senso antiorario guardando la curva nel senso delle y crescenti. Detto Σ_0 il cerchio del piano xz di centro $(0,0,4)$ e raggio 1 orientato con normale $\mathbf{j}$, sempre per il teorema del rotore si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}) = \int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \Phi_{\Sigma_0}(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}) = \iint_{\Sigma_0} (\mathrm{rot}\,\mathbf{G}) \cdot \mathbf{j}\, d\sigma = 2\iint_{\Sigma_0} d\sigma = 2\big|\Sigma_0\big| = 2\pi\,.$$

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

se ne studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.

Svolgimento

Passando in coordinate polari, si trova

$$\sup_{\vartheta\in[0,2\pi]} \big|f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)-1\big| = \left|\frac{\operatorname{sen}\rho^2}{\rho^2}-1\right| \to 0 \quad \text{per} \quad \rho\to 0\,,$$

da cui la continuità di f. Quanto alla derivabilità, si osservi che

$$f(x,0)=\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}\,,\quad x\neq 0\,,\qquad\qquad f(0,y)=\frac{\operatorname{sen}y^2}{y^2}\,,\quad y\neq 0\,,$$

da cui si ricava facilmente che

$$\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0\,.$$

Per verificare se f è differenziabile in $(0,0)$ calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)x-\partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Passando in coordinate polari si trova

$$\sup_{\vartheta\in[0,2\pi]}\left|\frac{\operatorname{sen}\rho^2-\rho^2}{\rho^3}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}\rho^2-\rho^2}{\rho^3}\right|\,,$$

e poiché

$$\lim_{\rho\to 0} = \frac{\operatorname{sen}\rho^2-\rho^2}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0} -\frac{\rho^6+o(\rho^6)}{6\rho^3} = 0\,,$$

si ottiene che f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 4

Utilizzando un opportuno cambio di variabili calcolare

$$\iint_D \frac{x+2y}{x-y+5}\,dxdy$$

dove

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\le x+2y\le (x-y)^2\,,\ 1\le x-y\le 2\right\}.$$

Svolgimento

Facciamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x+2y \\ v = x-y\,, \end{cases}$$

cosicché nelle variabili (u,v) l'insieme D è trasformato in

$$D'=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : v\in[1,2]\,,\ v\le u\le v^2\right\},$$

ed è quindi semplice rispetto alla variabile u. La matrice jacobiana della trasformazione è

$$J=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\,,\qquad \det J = -1/3\,.$$

Si ottiene

$$\iint_D \frac{x+2y}{x-y+5}\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D'} \frac{u}{v+5}\,dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\int_v^{v^2} \frac{u}{v+5}\,du\right)\,dv = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{v^4-v^2}{v+5}\,dv$$

Poiché

$$v^4 - v^2 = (v^3 - 5v^2 + 24v - 120)(v+5) + 600\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x+2y}{x-y+5}\,dxdy &= \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{v^4-v^2}{v+5}\,dv = \frac{1}{6}\int_1^2 \left(v^3 - 5v^2 + 24v - 120 + \frac{600}{v+5}\right)\,dv \\ &= \frac{1}{6}\Big[v^4/4 - 5v^3/3 + 12v^2 - 120v + 600\ln(v+5)\Big]_1^2 \\ &= -\frac{1103}{72} + 100\ln(7/6)\,.\end{aligned}$$