

Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2012/2013

Quarto appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data l'equazione

$$x^2 + \ln(1 + xy) + ye^{2y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

1. Provare che (*) definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una sola funzione $y = f(x)$.
2. Verificare che $x = 0$ è un punto critico per f e stabilirne la natura.

Svolgimento

1. La funzione

$$\varphi(x, y) = x^2 + \ln(1 + xy) + ye^{2y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è di classe C^∞ , verifica $\varphi(0, 0) = 0$ ed inoltre

$$\partial_y \varphi(x, y) = \frac{x}{1 + xy} + e^{2y} + 2ye^{2y},$$

e quindi $\partial_y \varphi(0, 0) = 1 \neq 0$. La conclusione allora segue grazie al teorema di Dini.

2. Si ha

$$\partial_x \varphi(x, y) = 2x + \frac{y}{1 + xy}.$$

Si ottiene

$$f'(x) = -\frac{\partial_x \varphi(x, f(x))}{\partial_y \varphi(x, f(x))},$$

da cui si deduce

$$f'(0) = -\frac{\partial_x \varphi(0, 0)}{\partial_y \varphi(0, 0)} = 0,$$

e quindi $x = 0$ è punto critico per f . Per stabilirne la natura, calcoliamo $f''(0)$. Si ha

$$f''(x) = -\frac{1}{[\partial_y \varphi(x, f(x))]^2} \left[\partial_{xx}^2 \varphi(x, f(x)) + f'(x) \partial_{xy}^2 \varphi(x, f(x)) \right] \partial_y \varphi(x, f(x)) + \\ - \left[\partial_{xy}^2 \varphi(x, f(x)) + f'(x) \partial_{yy}^2 \varphi(x, f(x)) \right] \partial_x \varphi(x, f(x)) \Big].$$

Poiché $f'(0) = 0$, $\partial_x \varphi(0, 0) = 0$ e

$$\partial_{xx}^2 \varphi(x, y) = 2 - \frac{y^2}{(1 + xy)^2},$$

si ottiene

$$f''(0) = -\frac{\partial_{xx}^2 \varphi(0, 0)}{\partial_y \varphi(0, 0)} = -2 < 0,$$

e quindi $x = 0$ è punto di massimo locale per f .

Esercizio 2

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

Poiché l'equazione

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

ha come sola soluzione $\lambda = 3$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

si scrive

$$y(t) = Ae^{3t} + Bte^{3t}, \quad (2)$$

con $A, B \in \mathbb{R}$. Per scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea dobbiamo procurarci una soluzione particolare. Imponendo in (2) le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, si ottiene $A = 0$ e $B = 1$. Allora una soluzione particolare è data da

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t (t-s)e^{3(t-s)}se^s ds = e^{3t} \int_0^t s(t-s)e^{-2s} ds \\ &= e^{3t} \left[-\frac{1}{2}s(t-s)e^{-2s} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-2s)e^{-2s} ds \right] = \frac{e^{3t}}{2} \left[-\frac{1}{2}(t-2s)e^{-2s} \Big|_0^t - \int_0^t e^{-2s} ds \right] \\ &= \frac{e^{3t}}{2} \left[\frac{t}{2}e^{-2t} + \frac{t}{2} + \frac{e^{-2s}}{2} \Big|_0^t \right] = \frac{e^t(t+1) + e^{3t}(t-1)}{4}. \end{aligned}$$

L'integrale generale cercato si scrive

$$y(t) = Ae^{3t} + Bte^{3t} + \frac{e^t(t+1) + e^{3t}(t-1)}{4}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$ si trova

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{3t} - 2te^{3t} + \frac{e^t(t+1) + e^{3t}(t-1)}{4} \\ &= \frac{e^{3t}}{4}(3-7t) + \frac{e^t}{4}(2t+1). \end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia data la funzione

$$f(x, y) = y^3 + 4x^2y - 12y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Provare che f ha massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2y^2 \leq 7\}.$$

2. Stabilire la natura dei punti critici di f interni a D .
3. Calcolare massimo e minimo assoluti di f in D .

Svolgimento

1. D è un insieme chiuso e limitato, essendo un cerchio chiuso nel piano (x, y) di raggio $\sqrt{7/2}$. Poiché f è funzione continua, il teorema di Weierstrass garantisce esistenza di massimo e minimo assoluti.
2. Si ha

$$\partial_x f(x, y) = 8xy, \quad \partial_y f(x, y) = 3y^2 + 4x^2 - 12.$$

Le coordinate dei punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 3y^2 + 4x^2 - 12 = 0, \end{cases}$$

da cui si ricava facilmente che deve essere $(x, y) = (0, \pm 2)$ o $(x, y) = (\pm\sqrt{3}, 0)$. I punti critici interni di f sono (evidentemente!) $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Per stabilirne la natura, calcoliamo la matrice hessiana di f in tali punti. Si ottiene

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8y & 8x \\ 8x & 6y \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} H_f(0, \sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(0, -\sqrt{3}) &= \begin{pmatrix} 0 & -8\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entrambe le matrici non sono semidefinite (gli autovalori in entrambi i casi sono $\pm 8\sqrt{3}$), e quindi entrambi i punti sono di sella.

3. Troviamo i punti critici di f vincolati alla frontiera ∂D di D , cioè alla circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 = 7$. Poiché

$$\nabla(2x^2 + 2y^2) = (4x, 4y) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in \partial D,$$

possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si ottiene il seguente sistema nelle variabili x, y, λ

$$\begin{cases} 8xy - 4\lambda x = 0 \\ 3y^2 + 4x^2 - 12 - 4\lambda y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 = 7. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo che deve essere $x = 0$ o $\lambda = 2y$. Con $x = 0$ si ottiene che devono essere verificate

$$\begin{cases} 3y^2 - 12 - 4\lambda y = 0 \\ 2y^2 = 7, \end{cases}$$

da cui si ottiene $y = \pm\sqrt{7/2}$ e λ di conseguenza. Con $\lambda = 2y$ si ottiene

$$\begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = 12 \\ 2x^2 + 2y^2 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 9y^2 = 2 \\ 2x^2 + 2y^2 = 7, \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 2/9 \\ x^2 = 59/18, \end{cases}$$

da cui si ricavano le soluzioni

$$(\sqrt{59}/18, \sqrt{2}/3), \quad (\sqrt{59}/18, -\sqrt{2}/3), \quad (-\sqrt{59}/18, \sqrt{2}/3), \quad (-\sqrt{59}/18, -\sqrt{2}/3),$$

con λ si conseguenza. Tali punti assieme a $(0, \pm\sqrt{7/2})$ sono i punti critici vincolati cercati. Poiché

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{7/2}) &= -\frac{17}{2}\sqrt{7/2}, & f(0, -\sqrt{7/2}) &= \frac{17}{2}\sqrt{7/2}, \\ f(\sqrt{59}/18, \sqrt{2}/3) &= -\frac{47}{6}\sqrt{59/18}, & f(\sqrt{59}/18, -\sqrt{2}/3) &= -\frac{47}{6}\sqrt{59/18}, \\ f(-\sqrt{59}/18, \sqrt{2}/3) &= \frac{47}{6}\sqrt{59/18}, & f(-\sqrt{59}/18, -\sqrt{2}/3) &= \frac{47}{6}\sqrt{59/18}, \end{aligned}$$

si ottiene che $(0, -\sqrt{7/2})$ è punto di massimo e $(0, \sqrt{7/2})$ è punto di minimo

Esercizio 4

Calcolare

$$\iiint_D x^2(2-z) \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, \, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Svolgimento

Integrando per strati si ottiene

$$\iiint_D x^2(2-z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{\{x^2+y^2 \leq z\}} x^2(2-z) \, dx \, dy \right) dz.$$

Con un cambio di coordinate polari si ottiene che

$$\begin{aligned} \iint_{\{x^2+y^2 \leq z\}} x^2(2-z) \, dx \, dy &= (2-z) \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 \cos^2 \vartheta \, d\rho \, d\vartheta \\ &= (2-z) \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{\pi}{4} z^2 (2-z). \end{aligned}$$

Allora

$$\iiint_D x^2(2-z) \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{4} \int_0^2 z^2(2-z) \, dz = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right)_0^2 = \frac{\pi}{3}.$$