Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 28/01/14

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2]\,,\ 3x^2+3y^2 \le z\right\}$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2]\,,\ z = 3x^2+3y^2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3\,.$$

1. Determinare l'insieme D dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte le condizioni di Dini affinché l'equazione $f(x,y)=0$ definisca implicitamente una funzione $x = g(y)$.
2. Si determinino i punti di D che sono critici per la funzione implicitamente definita.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme D di cui al punto 1:
- i punti critici di cui al punto 2:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{j} + \frac{4z^3}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che è conservativo.
2. Si calcoli il potenziale U di $\mathbf{F}$ tale che $U(1,0,0) = \pi/4$.
3. Sia $\mathbf{G}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + yz^2\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} - 3y\,\mathbf{k}\,.$$

   Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ attraverso la semisfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contenuta nel semispazio $x \geq 0$ orientata in modo che il versore normale abbia prima componente non negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il potenziale U di $\mathbf{F}$ richiesto:
- il valore del flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ richiesto:

Esercizio 4 [5 punti]

Siano dati la funzione $f(x,y,z) = xy$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolare i punti di massimo e minimo di f in Γ.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici vincolati di f:
- i punti di massimo e minimo di f in Γ:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 28/01/14

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\sqrt{y^2+z^2}\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [1,2]\,,\ y^2+z^2 \le x\right\}$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [1,2]\,,\ x = y^2+z^2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D \sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il vettore normale abbia prima componente negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 4x^4 - 4xy^3 + 3y^4 - 4\,.$$

1. Determinare l'insieme D dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte le condizioni di Dini affinché l'equazione $f(x,y)=0$ definisca implicitamente una funzione $y=g(x)$.
2. Si determinino i punti di D che sono critici per la funzione implicitamente definita.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme D di cui al punto 1:
- i punti critici di cui al punto 2:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{4x^3}{1+(x^4+y^2+z^2)^2}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{1+(x^4+y^2+z^2)^2}\,\mathbf{j} + \frac{2z}{1+(x^4+y^2+z^2)^2}\,\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che è conservativo.
2. Si calcoli il potenziale U di $\mathbf{F}$ tale che $U(0,1,0) = \pi/2$.
3. Sia $\mathbf{G}$ il campo vettoriale definito da

   $$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + 2y\,\mathbf{i} + 4x\,\mathbf{j} + 3x^2y\,\mathbf{k}\,.$$

   Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ attraverso la semisfera di equazione $x^2+y^2+z^2=4$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il potenziale U di $\mathbf{F}$ richiesto:
- il valore del flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ richiesto:

Esercizio 4 [5 punti]

Siano dati la funzione $f(x,y,z) = yz$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolare i punti di massimo e minimo di f in Γ.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici vincolati di f:
- i punti di massimo e minimo di f in Γ:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 28/01/14

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + y\sqrt{x^2+z^2}\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \in [2,3]\,,\ x^2+z^2 \leq y\right\}$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \in [2,3]\,,\ y = x^2+z^2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il vettore normale abbia seconda componente negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 5x^4 - 4xy^6 + 3y^8 - 5\,.$$

1. Determinare l'insieme D dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte le condizioni di Dini affinché l'equazione $f(x,y)=0$ definisca implicitamente una funzione $y = g(x)$.
2. Si determinino i punti di D che sono critici per la funzione implicitamente definita.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme D di cui al punto 1:
- i punti critici di cui al punto 2:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{1+(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathbf{i} + \frac{4y^3}{1+(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathbf{j} + \frac{2z}{1+(x^2+y^4+z^2)^2}\,\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che è conservativo.
2. Si calcoli il potenziale U di $\mathbf{F}$ tale che $U(-1,0,0) = \pi/4$.
3. Sia $\mathbf{G}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + 6y\,\mathbf{i} - 5x\,\mathbf{j} + 3x^3y^2\,\mathbf{k}\,.$$

   Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ attraverso la semisfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$ contenuta nel semispazio $z \le 0$ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il potenziale U di $\mathbf{F}$ richiesto:
- il valore del flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ richiesto:

Esercizio 4 [5 punti]

Siano dati la funzione $f(x,y,z) = xz$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^4+z^2 = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolare i punti di massimo e minimo di f in Γ.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici vincolati di f:
- i punti di massimo e minimo di f in Γ:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 28/01/14

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3 + 3xy^2)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z(x^2+y^2)\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [2,4]\,,\ x^2+y^2 \le z\right\}$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [2,4]\,,\ z = x^2+y^2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D:
- il valore del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 3x^8 - 4x^6y + 6y^4 - 6\,.$$

1. Determinare l'insieme D dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte le condizioni di Dini affinché l'equazione $f(x,y)=0$ definisca implicitamente una funzione $x = g(y)$.
2. Si determinino i punti di D che sono critici per la funzione implicitamente definita.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme D di cui al punto 1:
- i punti critici di cui al punto 2:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{4x^3}{1+(x^4+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{1+(x^4+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{j} + \frac{4z^3}{1+(x^4+y^2+z^4)^2}\,\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che è conservativo.
2. Si calcoli il potenziale U di $\mathbf{F}$ tale che $U(0,0,1) = -\pi/2$.
3. Sia $\mathbf{G}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + 4z\,\mathbf{i} + 3x^2z\,\mathbf{j} - 2x\,\mathbf{k}\,.$$

   Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ attraverso la semisfera di equazione $x^2+y^2+z^2=4$ contenuta nel semispazio $y \geq 0$ orientata in modo che il versore normale abbia seconda componente non negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il potenziale U di $\mathbf{F}$ richiesto:
- il valore del flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ richiesto:

Esercizio 4 [5 punti]

Siano dati la funzione $f(x,y,z) = xz$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^4 + z^2 = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolare i punti di massimo e minimo di f in Γ.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici vincolati di f:
- i punti di massimo e minimo di f in Γ: