

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 17/02/14

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0, \\ y & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0, 0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme dei punti in cui f è discontinua:
- gli eventuali valori di $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia $(\gamma, \mathbf{r})$ la curva (ramo di Lemniscata di Bernoulli) contenuta nel piano xy di equazione polare

$$\rho^2 = \cos(2\vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4],$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione associata all'equazione polare.

1. Calcolare l'integrale di prima specie

$$\int_{\gamma} x \, ds.$$

2. Verificare che $(\gamma, \mathbf{r})$ è un circuito e calcolare l'area della regione di piano in esso racchiusa usando la formula di Gauss-Green.
3. Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta tramite una rotazione completa di γ attorno all'asse y .

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale di cui al punto 1:
- l'area di cui al punto 2:
- l'area della superficie Σ di cui al punto 3:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq 4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_D \frac{\ln(4x^2 + 9y^2 + z^2)}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 + z^2}} dx dy dz.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale richiesto:

Esercizio 4 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}. \quad (*)$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (*).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (*).
3. Si calcoli la soluzione di (*) con dato iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- la matrice wronskiana di cui al punto 1:
- l'integrale generale di cui al punto 2:
- la soluzione del problema di Cauchy di cui al punto 3:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 17/02/14

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y \neq 0, \\ 2x & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0, 0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme dei punti in cui f è discontinua:
- gli eventuali valori di $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia $(\gamma, \mathbf{r})$ la curva (ramo di Lemniscata di Bernoulli) contenuta nel piano xy di equazione polare

$$\rho^2 = 2(\cos \vartheta)^2 - 2(\sin \vartheta)^2, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4],$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione associata all'equazione polare.

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} x \, ds.$$

2. Verificare che $(\gamma, \mathbf{r})$ è un circuito e calcolare l'area della regione di piano in esso racchiusa usando la formula di Gauss-Green.
3. Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta tramite una rotazione completa di γ attorno all'asse y .

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale di cui al punto 1:
- l'area di cui al punto 2:
- l'area della superficie Σ di cui al punto 3:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq \frac{5}{2}, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \leq 0 \right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_D \frac{\ln(x^2 + 4y^2 + 9z^2)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2}} dx dy dz.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale richiesto:

Esercizio 4 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (*).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (*).
3. Si calcoli la soluzione di (*) con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.

Indicare nella zona sottostante:

- la matrice wronskiana di cui al punto 1:
- l'integrale generale di cui al punto 2:
- la soluzione del problema di Cauchy di cui al punto 3:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 17/02/14

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 3y & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0, 0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme dei punti in cui f è discontinua:
- gli eventuali valori di $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia $(\gamma, \mathbf{r})$ la curva (ramo di Lemniscata di Bernoulli) contenuta nel piano xy di equazione polare

$$\rho^2 = 3 \cos(2\vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4],$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione associata all'equazione polare.

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} x \, ds.$$

2. Verificare che $(\gamma, \mathbf{r})$ è un circuito e calcolare l'area della regione di piano in esso racchiusa usando la formula di Gauss-Green.
3. Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta tramite una rotazione completa di γ attorno all'asse y .

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale di cui al punto 1:
- l'area di cui al punto 2:
- l'area della superficie Σ di cui al punto 3:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq 4x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 4, \ x \leq 0, \ y \leq 0, \ z \geq 0\}.$$

Calcolare

$$\iiint_D \frac{\ln(4x^2 + y^2 + 9z^2)}{\sqrt{4x^2 + y^2 + 9z^2}} dx dy dz.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale richiesto:

Esercizio 4 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (*).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (*).
3. Si calcoli la soluzione di (*) con dato iniziale $x(0) = 0, y(0) = 1$.

Indicare nella zona sottostante:

- la matrice wronskiana di cui al punto 1:
- l'integrale generale di cui al punto 2:
- la soluzione del problema di Cauchy di cui al punto 3:

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 17/02/14

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [5 punti]

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y \neq 0, \\ -2x & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0, 0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Indicare nella zona sottostante:

- l'insieme dei punti in cui f è discontinua:
- gli eventuali valori di $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia $(\gamma, \mathbf{r})$ la curva (ramo di Lemniscata di Bernoulli) contenuta nel piano xy di equazione polare

$$\rho^2 = 4(\cos \vartheta)^2 - 4(\sin \vartheta)^2, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4],$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione associata all'equazione polare.

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} x \, ds.$$

2. Verificare che $(\gamma, \mathbf{r})$ è un circuito e calcolare l'area della regione di piano in esso racchiusa usando la formula di Gauss-Green.
3. Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta tramite una rotazione completa di γ attorno all'asse y .

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale di cui al punto 1:
- l'area di cui al punto 2:
- l'area della superficie Σ di cui al punto 3:

Esercizio 3 [5 punti]

Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{3}{2} \leq x^2 + 9y^2 + 4z^2 \leq 5, \ x \geq 0, \ y \leq 0, \ z \leq 0 \right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_D \frac{\ln(x^2 + 9y^2 + 4z^2)}{\sqrt{x^2 + 9y^2 + 4z^2}} dx dy dz.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale richiesto:

Esercizio 4 [6 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-6t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (*).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (*).
3. Si calcoli la soluzione di (*) con dato iniziale $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- la matrice wronskiana di cui al punto 1:
- l'integrale generale di cui al punto 2:
- la soluzione del problema di Cauchy di cui al punto 3: