

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 14/07/14

Cognome e Nome Matr.

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Parte di esercizi

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e il dominio D definiti da

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo assoluti in D .
2. Calcolare il massimo e minimo assoluti di f in D .

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici di f interni a D :
- i punti di massimo assoluto di f :
- i punti di minimo assoluto di f :

Esercizio 2 [5 punti]

Data la funzione

$$f(x, y) = e^{xy} - e^{-2y} \cos x - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

provare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ definita in un intorno di $x_0 = \pi/2$. Determinare poi l'equazione della retta tangente al grafico di tale funzione nel punto di ascissa x_0 .

Indicare nella zona sottostante:

- l'equazione della retta tangente richiesta:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x^2} \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + (4y + xe^z) \mathbf{k}.$$

1. Mediante un calcolo diretto calcolare il flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ attraverso la porzione di superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenuta nel semispazio $x \geq 0$ ed orientata nel verso delle x crescenti.
2. Calcolare il flusso di cui al punto precedente utilizzando il teorema del rotore.
3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x, y, z) = x^2 \mathbf{F}(x, y, z)$ attraverso la frontiera del dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z \in [-1, 1]\},$$

orientata con la normale esterna.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore del flusso di $\text{rot } \mathbf{F}$ richiesto:
- il valore del flusso di $\mathbf{G}$ richiesto:

Esercizio 4 [5 punti]

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = e^{3t} \sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:
- l'integrale generale dell'equazione data:
- la soluzione del problema di Cauchy: