Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 16/09/14

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Scrivere le risposte richieste su questo foglio senza giustificazione.
Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.
Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Parte di esercizi

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy \operatorname{sen} x + (2x+3y)(x^2+y^2)}{2x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $(0,0)$.

Indicare nella zona sottostante:

- se f è continua in $(0,0)$:
- se f è derivabile in $(0,0)$:
- gli eventuali valori delle derivate parziali di f nell'origine:
- se f è differenziabile in $(0,0)$:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 4xyz\,\mathbf{i} + 2x^2z\,\mathbf{j} + (2x^2y + z^3)\,\mathbf{k}\,.$$

1. Calcolare $\operatorname{rot}\mathbf{F}$.
2. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo il circuito $(\gamma, \mathbf{r})$ parametrizzato da
$$\mathbf{r}(t) = \big((t-2\pi)e^{2t}\arctan t,\ \operatorname{sen} t \ln(1+t^2),\ (1-\cos t)e^{\cos(3\pi t)}\big)\,, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie
$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\,, \quad 1 \le z \le 2\big\}\,,$$
orientata in modo che il versore normale abbia terza componente negativa.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$:
- il valore della circuitazione richiesta:
- il valore del flusso richiesto:

Esercizio 3 [5 punti]

Si calcoli l'intergale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{2x + 3y^2 - (z-1)^2}\, dr\,,$$

dove $(\gamma, \mathbf{r})$ è la la curva parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t, 2t+1)\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale richiesto:

Esercizio 4 [7 punti]

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\,. \tag{$*$}$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a $(*)$.
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema $(*)$.
3. Si calcoli la soluzione di $(*)$ con dato iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- la matrice wronskiana di cui al punto 1:
- l'integrale generale di cui al punto 2:
- la soluzione del problema di Cauchy di cui al punto 3: