Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2013/2014

Primo appello - Tema 1

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2]\,,\ 3x^2+3y^2 \le z\right\}$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2]\,,\ z = 3x^2+3y^2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz\,.$$
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.
3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il vettore normale abbia terza componente negativa.

Svolgimento

Il dominio D è raffigurato in figura 1 (che non è in scala), ed è compreso fra la superficie Σ, che è una porzione del paraboloide di equazione $z = 3x^2+3y^2$ (in verde nella figura), ed i piani di equazione $z = 1$ e $z = 2$ (in rosso). La superficie Σ è orientata con la normale esterna a D.

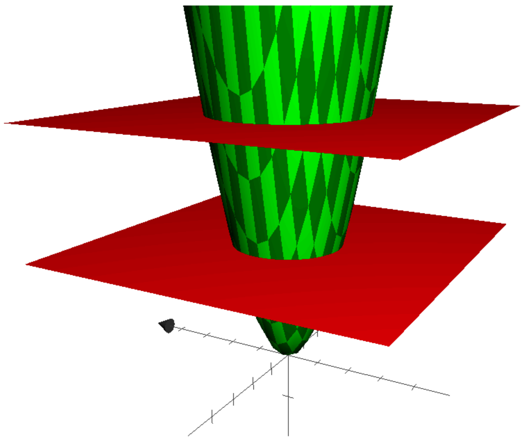

Figura 1: Il dominio D e la superficie Σ

1. Passando in coordinate cilindriche e poi integrando per strati si ottiene

$$
\begin{aligned}
\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz &= \int_1^2 \left(\iint_{[0,\sqrt{z/3}]\times[0,2\pi]} \rho^2\,d\rho d\vartheta \right) dz = \frac{2\pi}{3}\int_1^2 \rho^3 \Big|_0^{\sqrt{z/3}} dz \\
&= \frac{2\pi}{3^{5/2}} \int_1^2 z^{3/2}\,dz = \frac{2\pi}{3^{5/2}}\cdot\frac{2}{5}z^{5/2}\Big|_1^2 = \frac{4\pi}{5\cdot 3^{5/2}}\big(2^{5/2}-1\big)\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2. Grazie al teorema di Gauss e utilizzando (1), si ottiene

$$
\Phi(\mathbf{F};\partial D) = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,dxdydx = 2\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \frac{8\pi}{5\cdot 3^{5/2}}\big(2^{5/2}-1\big)\,. \tag{2}
$$

3. È possibile fare un conto diretto parametrizzando Σ con

$$
\mathbf{r}(x,y) = \big(x,y,3(x^2+y^2)\big)\,, \qquad (x,y)\in B_{\sqrt{2/3}}(0,0)\setminus B_{\sqrt{1/3}}(0,0)\,,
$$

e prendendo come normale

$$
\mathbf{n} = -\frac{\partial_x\mathbf{r}\times\partial_y\mathbf{r}}{\|\partial_x\mathbf{r}\times\partial_y\mathbf{r}\|} = \frac{(6x,6y,-1)}{\|(6x,6y,-1)\|}\,.
$$

Per semplificare i conti, procediamo in un altro modo, sfruttando il lavoro già fatto. Siano

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x^2+3y^2\le 1\,,\ z=1\big\}\,, \\
\Sigma_2 &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x^2+3y^2\le 2\,,\ z=2\big\}\,,
\end{aligned}
$$

orientate rispettivamente con normale $-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}$. Allora

$$
\partial D = \Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2\,,
$$

cosicché vale

$$
\Phi(\mathbf{F};\partial D) = \Phi(\mathbf{F};\Sigma) + \Phi(\mathbf{F};\Sigma_1) + \Phi(\mathbf{F};\Sigma_2)\,,
$$

da cui, grazie a (2)

$$
\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = \frac{8\pi}{5\cdot 3^{5/2}}\big(2^{5/2}-1\big) - \Phi(\mathbf{F};\Sigma_1) - \Phi(\mathbf{F};\Sigma_2)\,.
$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{F};\Sigma_1) &= -2\iint_{B_{\sqrt{1/3}}(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = -4\pi\int_0^{\sqrt{1/3}} \rho^2\,d\rho = -\frac{4\pi}{3^{5/2}}\,, \\
\Phi(\mathbf{F};\Sigma_2) &= 4\iint_{B_{\sqrt{2/3}}(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = 8\pi\int_0^{\sqrt{2/3}} \rho^2\,d\rho = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3^{5/2}}\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = \frac{8\pi}{5\cdot 3^{5/2}}\big(2^{5/2}-1\big) + \frac{4\pi}{3^{5/2}} - \frac{16\sqrt{2}\pi}{3^{5/2}} = \frac{4\pi}{5\cdot 3^{3/2}}\big(1-2^{5/2}\big)\,.
$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3\,.$$

1. Determinare l'insieme D dei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte le condizioni di Dini affinché l'equazione $f(x,y) = 0$ definisca implicitamente una funzione $x = g(y)$.

2. Si determinino i punti di D che sono critici per la funzione implicitamente definita.

Svolgimento

1. Evidentemente D è dato dall'insieme dei punti che soddisfano l'equazione $f(x,y) = 0$, ma non la condizione $\partial_x f(x,y) \neq 0$. Cerchiamo allora le soluzioni di

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \partial_x f(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3 = 0 \\ 12x^3 - 12x^2y = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3 = 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad y = x\,. \end{cases}$$

Se $x = 0$, la prima equazione restituisce $y = \pm 1$. Se $y = x$, dalla prima equazione si ottiene

$$2x^4 = 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{3/2}\,.$$

Allora

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\big\} \setminus \big\{(0,1),\ (0,-1),\ (\sqrt[4]{3/2}, \sqrt[4]{3/2}),\ (-\sqrt[4]{3/2}, -\sqrt[4]{3/2})\big\}\,.$$

2. Poiché per la funzione implicita g vale

$$g'(y) = -\frac{\partial_y f(g(y),y)}{\partial_x f(g(y),y)}\,,$$

affinché $g'(y) \neq 0$, deve essere $\partial_y f(g(y),y) = 0$, e quindi i punti di D critici per g sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3 = 0 \\ -4x^3 + 12y^3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} 3x^4 - 4x^3y + 3y^4 - 3 = 0 \\ x = \sqrt[3]{3}y\,. \end{cases}$$

Sostituendo $x = \sqrt[3]{3}y$ nella prima equazione, si trova

$$3^{7/3}y^4 - 12y^4 + 3y^4 - 3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3\big(\sqrt[3]{3} - 1\big)y^4 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3(\sqrt[3]{3} - 1)}}\,.$$

I punti cercati sono

$$\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3(\sqrt[3]{3} - 1)}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3(\sqrt[3]{3} - 1)}}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3(\sqrt[3]{3} - 1)}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3(\sqrt[3]{3} - 1)}}\right).$$

Esercizio 3

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\mathbf{j} + \frac{4z^3}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\mathbf{k}\,.$$

1. Si provi che è conservativo.
2. Si calcoli il potenziale U di $\mathbf{F}$ tale che $U(1,0,0) = \pi/4$.
3. Sia $\mathbf{G}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + yz^2\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} - 3y\,\mathbf{k}\,.$$

   Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ attraverso la semisfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$ contenuta nel semispazio $x \geq 0$ orientata in modo che il versore normale abbia prima componente non negativa.

Svolgimento

1. Si ha

$$\partial_y \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^4)^2} = -\frac{8xy(x^2+y^2+z^4)}{\left[1+(x^2+y^2+z^4)^2\right]^2} = \partial_x \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,,$$

$$\partial_z \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^4)^2} = -\frac{16xz^3(x^2+y^2+z^4)}{\left[1+(x^2+y^2+z^4)^2\right]^2} = \partial_x \frac{4z^3}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,,$$

$$\partial_z \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^4)^2} = -\frac{16yz^3(x^2+y^2+z^4)}{\left[1+(x^2+y^2+z^4)^2\right]^2} = \partial_y \frac{4z^3}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,,$$

   e quindi $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, $\mathbf{F}$ è conservativo.

2. Si ha

$$U(x,y,z) = \int \frac{2x}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,dx = \arctan(x^2+y^2+z^4) + C(y,z)\,,$$

   ed essendo

$$\partial_y \arctan(x^2+y^2+z^4) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,, \quad \partial_z \arctan(x^2+y^2+z^4) = \frac{4z^3}{1+(x^2+y^2+z^4)^2}\,,$$

   si trova

$$U(x,y,z) = \arctan(x^2+y^2+z^4) + c\,,$$

   con $c \in \mathbb{R}$. Poiché $U(1,0,0) = \pi/4$, si ha

$$c = \pi/4 - \arctan 1 = 0\,,$$

   da cui $U(x,y,z) = \arctan(x^2+y^2+z^4)$.

3. Si osservi che
$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(x,y,z) = \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) + \operatorname{rot}\left(yz^2\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} - 3y\,\mathbf{k}\right),$$
ed essendo $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) \equiv (0,0,0)$, si trova
$$\operatorname{rot}\mathbf{G}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 2z & -3y \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}\,.$$
Sia Σ la semisfera data e
$$\Sigma_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\,,\ y^2 + z^2 \le 4\right\}$$
orientata con versore normale $\mathbf{i}$. Allora $\partial\Sigma = \partial\Sigma_0$ con orientazione concorde, cosicché, grazie al teorema del rotore,
$$\Phi(\operatorname{rot}\mathbf{G};\Sigma) = \Phi(\operatorname{rot}\mathbf{G};\Sigma_0) = -5\iint_{B_2(0,0)} dxdy = -20\pi\,.$$
Attenzione che questo non è l'unico modo di procedere, ma è il più semplice. Alternativamente, è possibile calcolare il flusso richiesto con un conto diretto parametrizzando opportunamente Σ o sfruttando ancora il teorema del rotore e calcolando la circuitazione di $\mathbf{G}$ attorno alla curva $(\partial\Sigma, \mathbf{r})$ parametrizzata da
$$\mathbf{r}(\vartheta) = (0, 2\cos\vartheta, 2\operatorname{sen}\vartheta)\,, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]\,,$$
che è la circonferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 contenuta nel piano yz, orientata in senso antiorario se guardata nel verso di $\mathbf{i}$.

Esercizio 4

Siano dati la funzione $f(x,y,z) = xy$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e l'insieme
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolare i punti di massimo e minimo di f in Γ.

Svolgimento

1. Γ è un insieme chiuso perché un insieme di livello della funzione continua
$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$
Inoltre è limitato perché, se $(x,y,z) \in \Gamma$, allora
$$x^2\,,\ y^2\,,\ z^4 \le 1 \quad \Longrightarrow \quad |x|\,,\ |y|\,,\ |z| \le 1\,.$$
Essendo f funzione continua, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza del massimo e del minimo.

2. L'insieme Γ non ha punti singolari perché

$$\nabla\varphi(x,y,z) = (2x, 2y, 4z^3) \neq (0,0,0) \qquad \forall\,(x,y,z) \in \Gamma\,.$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i punti critici vincolati di f sono tutti e soli le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ -4\lambda z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^4 = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ \lambda = 0 \quad \text{o} \quad z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^4 = 1\,. \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, si ottiene $x = y = 0$ e $z = \pm 1$. Se z=0, si ottiene

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 1\,, \end{cases}$$

da cui $x = \pm 1/\sqrt{2}$ ed y e λ di conseguenza. Allora i punti critici di f vincolati a Γ sono

$$(0,0,1)\,, \quad (0,0,-1)\,, \quad (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\,,$$
$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\,, \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\,, \quad (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\,,$$

da cui si ricava che

$$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\,, \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

sono di minimo per f, con valore minimo $-1/2$, e

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\,, \quad (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

sono di massimo per f, con valore massimo $1/2$.