Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2013/2014

Secondo appello - Tema 1

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ y & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0,0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

1. Al di fuori dell'asse y la funzione data è un polinomio di secondo grado e quindi è continua. Eventuali punti di discontinuità stanno sull'asse y. Sui punti di tale asse f è continua se e solo se
$$y = f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x,y) = y^2\,,$$
da cui si ricava $y = 0$ o $y = 1$. Allora i punti di discontinuità di f sono tutti i soli in punti dell'asse y diversi da $(0,0)$ e $(0,1)$.

2. Poiché
$$f(x,0) = x^2\,, \qquad f(0,y) = y\,,$$
si ha
$$\partial_x f(x,0) = 2x\,, \qquad \partial_y f(0,y) = 1\,,$$
da cui si ricava che f è derivabile in $(0,0)$ e valgono
$$\partial_x f(0,0) = 0\,, \qquad \partial_y f(0,0) = 1\,.$$

3. Affinché f sia differenziabile in $(0,0)$ per definizione deve valere
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\partial_x f(0,0) - y\partial_y f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$
Tale limite implica che deve valere
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} \frac{x^2+y^2-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$
Ma prendendo la restrizione a $y = x$ si trova che vale
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x}{\sqrt{2}|x|} = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}\,,$$
che non esiste. Se ne deduce che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia $(\gamma, \mathbf{r})$ la curva (ramo di Lemniscata di Bernoulli) contenuta nel piano xy di equazione polare

$$\rho^2 = \cos(2\vartheta)\,, \qquad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]\,,$$

dove $\mathbf{r}$ è la parametrizzazione associata all'equazione polare.

1. Calcolare l'integrale di prima specie
$$\int_\gamma x\,ds\,.$$

2. Verificare che $(\gamma, \mathbf{r})$ è un circuito e calcolare l'area della regione di piano in esso racchiusa usando la formula di Gauss-Green.

3. Calcolare l'area della superficie Σ ottenuta tramite una rotazione completa di γ attorno all'asse y.

Svolgimento

La curva è rappresentata in figura 1.

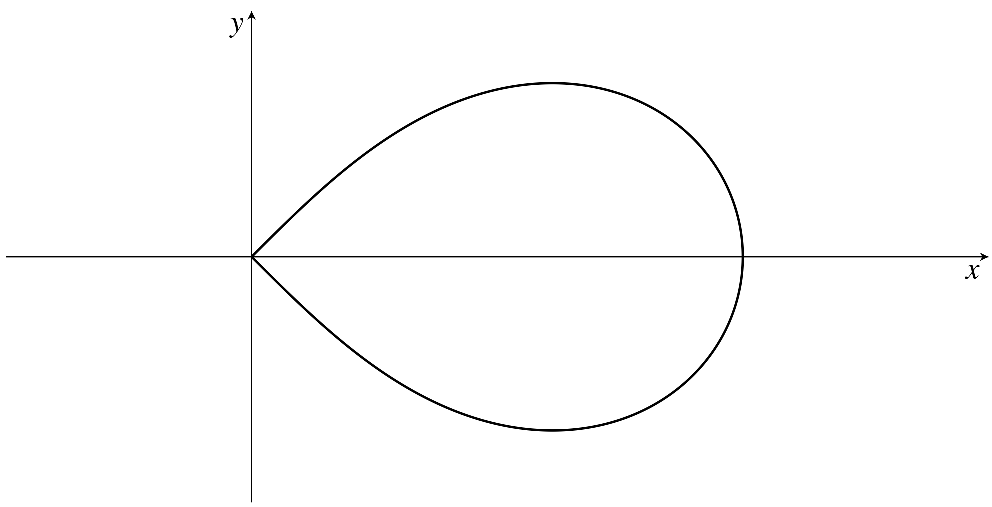

Figura 1: Il ramo di Lemniscata dell'esercizio 2

1. La curva è parametrizzata da
$$\mathbf{r}(\vartheta) = \left(\sqrt{\cos(2\vartheta)}\cos\vartheta, \sqrt{\cos(2\vartheta)}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right), \qquad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]\,.$$
Si ha
$$\|\mathbf{r}'(\vartheta)\| = \sqrt{\cos(2\vartheta) + \frac{\mathrm{sen}^2(2\vartheta)}{\cos(2\vartheta)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\vartheta)}}\,.$$
Allora
$$\int_\gamma x\,ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\vartheta)}\cos\vartheta \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos(2\vartheta)}}\,d\vartheta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\vartheta\,d\vartheta = \sqrt{2}\,.$$

2. Essendo $\mathbf{r}(-\pi/4)=\mathbf{r}(\pi/4)=(0,0)$, $(\gamma,\mathbf{r})$ è una curva chiusa. Inoltre, se $\mathbf{r}(\vartheta_1)=\mathbf{r}(\vartheta_2)$, si ha

$$\sqrt{\cos(2\vartheta_1)}\cos\vartheta_1=\sqrt{\cos(2\vartheta_2)}\cos\vartheta_2\,,\qquad \sqrt{\cos(2\vartheta_1)}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1=\sqrt{\cos(2\vartheta_2)}\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2\,,$$

da cui si ricava facilmente che $\vartheta_1=\vartheta_2$. Se ne deduce che $(\gamma,\mathbf{r})$ è un circuito. Siano $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tali che $\lambda+\mu=1$, e chiamiamo D la regione racchiusa dalla curva. Allora

$$\begin{aligned}|D|&=\int_\gamma \lambda x\,dy-\mu y\,dx=\\&=\lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\vartheta)}\cos\vartheta\left(-\frac{\mathrm{sen}(2\vartheta)}{\sqrt{\cos(2\vartheta)}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta+\sqrt{\cos(2\vartheta)}\cos\vartheta\right)d\vartheta+\\&\qquad-\mu\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\vartheta)}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(-\frac{\mathrm{sen}(2\vartheta)}{\sqrt{\cos(2\vartheta)}}\cos\vartheta-\sqrt{\cos(2\vartheta)}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right)d\vartheta\,.\end{aligned}$$

Scegliendo $\lambda=\mu=1/2$, si ottiene

$$|D|=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos(2\vartheta)\,d\vartheta=\frac{1}{2}\,.$$

3. Per il teorema di Guldino si ha

$$|\Sigma|=2\pi\int_\gamma x\,ds=2\sqrt{2}\pi\,.$$

Esercizio 3

Sia

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{1}{2}\le 4x^2+9y^2+z^2\le 4\,,\ x\le 0\,,\ y\ge 0\,,\ z\ge 0\right\}.$$

Calcolare

$$\iiint_D \frac{\ln(4x^2+9y^2+z^2)}{\sqrt{4x^2+9y^2+z^2}}\,dxdydz\,.$$

Svolgimento

Facciamo il cambio di coordinate

$$\begin{cases}2x=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta\\3y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta\\z=\rho\cos\varphi\,,\end{cases}\qquad \rho\ge 0\,,\ \varphi\in[0,\pi]\,,\ \vartheta\in[0,2\pi]\,.$$

La matrice jacobiana del cambio di coordinate di scrive

$$J(\rho,\varphi,\vartheta)=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta}{2}&\frac{\rho\cos\varphi\cos\vartheta}{2}&-\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{2}\\\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{3}&\frac{\rho\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{3}&\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\vartheta}{3}\\\cos\varphi&-\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi&0\end{pmatrix},$$

e il suo determinante è

$$\det J(\rho,\varphi,\vartheta)=\frac{\rho^2}{6}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,$$

che è sempre non negativo. Detto

$$D' = \left\{(\rho,\varphi,\vartheta) : 1/\sqrt{2} \le \rho \le 2\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \vartheta \in [\pi/2,\pi]\right\},$$

utilizzando opportune formule di riduzione si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{\ln(4x^2+9y^2+z^2)}{\sqrt{4x^2+9y^2+z^2}}\,dxdydz &= \iiint_{D'} \frac{\ln\rho^2}{\rho}\frac{\rho^2}{6}\operatorname{sen}\varphi\,d\rho d\varphi d\vartheta \\
&= \frac{\pi}{6}\left(\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{1/\sqrt{2}}^{2}\rho\ln\rho\,d\rho\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\frac{\rho^2}{2}\ln\rho\Big|_{1/\sqrt{2}}^{2} - \frac{1}{2}\int_{1/\sqrt{2}}^{2}\rho\,d\rho\right] \\
&= \frac{\pi}{12}\left(4\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1/\sqrt{2}) - 2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{48}(17\ln 2 - 7)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (1).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (1).
3. Si calcoli la soluzione di (1) con dato iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Svolgimento

1. Gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_2 = 2\,,$$

di rispettivi autovettori

$$\mathbf{v}_1 = (-\sqrt{2}, 1)\,, \qquad \mathbf{v}_2 = (1, \sqrt{2})\,.$$

Quindi una base di soluzioni per il sistema omogeneo associato (1) è data da

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ \sqrt{2}e^{2t} \end{pmatrix},$$

e una matrice wronskiana si scrive

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & \sqrt{2}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. L'integrale generale è dato da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t)\,,$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $t \mapsto \mathbf{v}(t)$ è una soluzione particolare di (1). Il metodo della variazione delle costanti dà

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t \big[\mathbf{W}(s)\big]^{-1} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ e^{s} \end{pmatrix} ds\,.$$

Poiché

$$\mathbf{W}(t) = -\frac{1}{3e^t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{-t} & -\sqrt{2}e^{-t} \end{pmatrix}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= -\mathbf{W}(t) \int_0^t \frac{1}{3e^s} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{2s} & -e^{2s} \\ -e^{-s} & -\sqrt{2}e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} \\ e^{s} \end{pmatrix} ds \\
&= -\mathbf{W}(t) \int_0^t \frac{1}{3e^s} \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{s} - e^{3s} \\ -e^{-2s} - \sqrt{2} \end{pmatrix} ds = -\frac{1}{3}\mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \sqrt{2} - e^{2s} \\ -e^{-3s} - \sqrt{2}e^{-s} \end{pmatrix} ds \\
&= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & \sqrt{2}e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}t - (e^{2t} - 1)/2 \\ (e^{-3t} - 1)/3 + \sqrt{2}(e^{-t} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \frac{1}{18}\big[2e^{2t}(1 + 3\sqrt{2}) - 9\sqrt{2}e^{t} + e^{-t}(12t + 3\sqrt{2} - 2)\big] \\
v_2(t) &= \frac{1}{18}\big[2e^{2t}(\sqrt{2} + 6) - 9e^{t} - e^{-t}(6\sqrt{2}t + 3 + 2\sqrt{2})\big]\,.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale cercato è

$$\begin{cases} x(t) = -\sqrt{2}c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + v_1(t) \\ y(t) = c_1 e^{-t} + \sqrt{2}c_2 e^{2t} + v_2(t)\,. \end{cases}$$

3. Dopo aver osservato che $\mathbf{v}(0) = (0, 0)$, si ottiene che deve valere

$$\begin{cases} x(0) = -\sqrt{2}c_1 + c_2 = -1 \\ y(0) = c_1 + \sqrt{2}c_2 = 0\,, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,, \qquad c_2 = -\frac{1}{3}\,.$$

La soluzione cercata è allora

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{2}{3}e^{-t} - \dfrac{1}{3}e^{2t} + v_1(t) \\[2ex] y(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-t} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}c_2 e^{2t} + v_2(t)\,. \end{cases}$$