Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2013/2014

Terzo appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e il dominio D definiti da

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2\,, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4\big\}\,.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo assoluti in D.
2. Calcolare il massimo e minimo assoluti di f in D.

Svolgimento

1. D è chiuso perché la funzione $(x,y) \mapsto 3x^2 + 4y^2$ è continua. Inoltre D è limitato perché se $(x,y) \in D$, allora $3x^2 \leq 4$ e $4y^2 \leq 4$, da cui si ricava $|x| \leq 2/\sqrt{3}$ e $|y| \leq 1$. Essendo f continua, si conclude con il teorema di Weierstrass.

2. Cerchiamo innanzitutto i punti critici di f interni a D. Deve essere

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 < 4\,, \end{cases} \iff \begin{cases} 2xe^{x^2+y^2} - x = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} - 2y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 < 4\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x(2e^{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ 2y(e^{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 < 4\,, \end{cases}$$

da cui si ricava che deve essere $(x,y) = (0,0)$. Altri candidati punti di massimo e minimo stanno sulla frontiera di D,

$$\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 = 4\big\}\,.$$

Questo è un vincolo regolare, come si verifica facilmente, e quindi possiamo utilizzare il teorema sui moltiplicatori di Lagrange e risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y^2} - x - 6\lambda x = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} - 2y - 8\lambda y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 = 4\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x(2e^{x^2+y^2} - 1 - 6\lambda) = 0 \\ 2y(e^{x^2+y^2} - 1 - 4\lambda) = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 = 4\,. \end{cases}$$

Se $x = 0$, dall'ultima equazione si ricava $y = \pm 1$, e poi λ di conseguenza dalla seconda equazione. Se $y = 0$, sempre dall'ultima equazione si ricava $x = \pm 2/\sqrt{3}$, e poi λ di conseguenza dalla prima equazione. Siano ora $x, y \neq 0$. Allora dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 - 6\lambda = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 - 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 = 4\,. \end{cases}$$

Si osservi che, ricavando $e^{x^2+y^2}$ dalle prime due equazioni, deve valere

$$4\lambda + 1 = \frac{6\lambda + 1}{2}\,,$$

da cui $\lambda = -1/2$, e quindi $e^{x^2+y^2} + 1 = 0$, che non ha soluzioni. Allora gli unici punti critici di f vincolati a Γ sono $(0, \pm 1)$ e $(\pm 2/\sqrt{3}, 0)$. Poiché

$$f(0,0) = 1\,, \quad f(0,\pm 1) = e - 1\,, \quad f(\pm 2/\sqrt{3}, 0) = e^{4/3} - 2/3\,,$$

si trova che $(0,0)$ è punto di minimo, e $(\pm 2/\sqrt{3}, 0)$ sono punti di massimo.

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{xy} - e^{-2y}\cos x - 1\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

provare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ definita in un intorno di $x_0 = \pi/2$. Determinare poi l'equazione della retta tangente al grafico di tale funzione nel punto di ascissa x_0.

Svolgimento

Si osservi che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f(\pi/2, 0) = 0$ e che

$$\partial_y f(x,y) = xe^{xy} + 2e^{-2y}\cos x \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_y f(\pi/2, 0) = \pi/2 \neq 0\,.$$

Siamo allora nelle condizioni di applicare il teorema di Dini e dedurre l'esistenza della funzione g, che eredita la regolarità di f ed è quindi di classe C^∞. Inoltre si ha $g(\pi/2) = 0$. Per calcolare la retta tangente al grafico di g dobbiamo procurarci $g'(\pi/2)$. Si ha

$$g'(\pi/2) = -\frac{\partial_x f(\pi/2, 0)}{\partial_y f(\pi/2, 0)}\,,$$

ed essendo

$$\partial_x f(x,y) = ye^{xy} + e^{-2y}\,\mathrm{sen}\, x \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_x f(\pi/2, 0) = 1\,,$$

si ottiene $g'(\pi/2) = -2/\pi$. L'equazione della retta tangente è

$$y = -\frac{2}{\pi}(x - \pi/2)\,.$$

Esercizio 3

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^{x^2}\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + (4y + xe^z)\,\mathbf{k}\,.$$

1. Mediante un calcolo diretto calcolare il flusso di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ attraverso la porzione di superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenuta nel semispazio $x \geq 0$ ed orientata nel verso delle x crescenti.

2. Calcolare il flusso di cui al punto precedente utilizzando il teorema del rotore.

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{G}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{F}(x,y,z)$ attraverso la frontiera del dominio
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ y \geq 0\,,\ z \in [-1,1]\right\}\,,$$
orientata con la normale esterna.

Svolgimento

1. Si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{x^2} & y^2 & 4y + xe^z \end{pmatrix} = 4\,\mathbf{i} - e^z\,\mathbf{j}\,.$$

   Parametrizzando la superficie sferica data, che chiamiamo Σ, con

$$\boldsymbol{\sigma}(y,z) = \sqrt{1-y^2-z^2}\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,, \qquad (y,z)\in B_1(0,0)\,,$$

   che automaticamente orienta la superficie come richiesto, si ha

$$\Phi(\mathbf{F},\Sigma) = \iint_{B_1(0,0)} \operatorname{rot}\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(y,z))\cdot\big(\partial_y\boldsymbol{\sigma}(y,z)\times\partial_z\boldsymbol{\sigma}(y,z)\big)\,dydz\,.$$

   Poiché

$$\begin{aligned}\partial_y\boldsymbol{\sigma}(y,z)\times\partial_z\boldsymbol{\sigma}(y,z) &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\,\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\,\mathbf{k}\,,\end{aligned}$$

   si trova

$$\Phi(\mathbf{F},\Sigma) = \iint_{B_1(0,0)}\left(4 - \frac{ye^z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)dydz = 4\pi\,,$$

   essendo

$$\iint_{B_1(0,0)}\frac{ye^z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz = 0$$

   per ragioni di simmetria. Altrimenti, passando in coordinate polari

$$\begin{cases} y = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho\operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases}$$

   si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_{B_1(0,0)}\frac{ye^z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}dydz &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\cos\vartheta e^{\rho\operatorname{sen}\vartheta}}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho d\vartheta \\ &= \int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\int_0^{2\pi}e^{\rho\operatorname{sen}\vartheta}\rho\cos\vartheta\,d\vartheta\right)d\rho \\ &= \int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{\rho\operatorname{sen}\vartheta}\Big|_0^{2\pi}\,d\rho = 0\,.\end{aligned}$$

2. Il bordo di Σ è la circonferenza intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ con il piano $x=0$, orientata in modo da essere percorsa in senso antiorario, se vista nel verso delle x crescenti. Una sua parametrizzazione è data da

$$\mathbf{r}(\vartheta) = (0,\cos\vartheta,\operatorname{sen}\vartheta)\,, \qquad \vartheta\in[0,2\pi]\,.$$

Si ottiene

$$\Phi(\mathbf{F},\Sigma) = \int_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\vartheta))\cdot \mathbf{r}'(\vartheta)\, d\vartheta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + 4\cos^2\vartheta)\, d\vartheta = 4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}\, d\vartheta = 4\pi\,.$$

3. Si ha

$$\mathbf{G}(x,y,z) = x^2 e^{x^2}\,\mathbf{i} + x^2y^2\,\mathbf{j} + (4yx^2 + x^3e^z)\,\mathbf{k}\,.$$

Per il teorema della divergenza

$$\Phi(\mathbf{G};\partial D) = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{G}(x,y,z)\, dxdydz\,,$$

ed essendo

$$\operatorname{div}\mathbf{G}(x,y,z) = (2x+2x^3)e^{x^2} + 2x^2y + x^3e^z\,,$$

si ottiene

$$\Phi(\mathbf{G};\partial D) = \iiint_D \left[(2x+2x^3)e^{x^2} + 2x^2y + x^3e^z\right] dxdydz\,.$$

Si osservi che

$$\iiint_D (2x+2x^3)e^{x^2}\, dxdydz = \iiint_D x^3e^z\, dxdydz = 0$$

per ragioni di simmetria. Allora, passando in coordinate cilindriche si ottiene

$$\Phi(\mathbf{G};\partial D) = 2\iiint_D x^2y\, dxdydz = 4\int_0^1\int_0^\pi \rho^4\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, d\rho d\vartheta = \frac{8}{15}\,.$$

Esercizio 4

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = e^{3t}\operatorname{sen} t \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Svolgimento

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

ha per soluzioni $\lambda = 3$ e $\lambda = -4$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata si scrive

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{-4t}\,.$$

Ponendo $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ricava $A = 1/7$ e $B = -1/7$. Allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$v(t) = \frac{1}{7}\int_0^t \left(e^{3(t-s)} - e^{-4(t-s)}\right)e^{3s}\operatorname{sen} s\, ds = \frac{1}{7}\left[e^{3t}\int_0^t \operatorname{sen} s\, ds - e^{-4t}\int_0^t e^{7s}\operatorname{sen} s\, ds\right]\,.$$

Poiché

$$\int_0^t \operatorname{sen} s\, ds = 1 - \cos t\,,$$

e

$$\int_0^t e^{7s} \operatorname{sen} s \, ds = \frac{1}{7} e^{7s} \operatorname{sen} s \Big|_0^t - \frac{1}{7} \int_0^t e^{7s} \cos s \, ds = \frac{1}{7} e^{7t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{49} \left[e^{7s} \cos s \Big|_0^t + \int_0^t e^{7s} \operatorname{sen} s \, ds \right] ,$$

da cui

$$\int_0^t e^{7s} \operatorname{sen} s \, ds = \frac{1}{50} \left[7e^{7t} \operatorname{sen} t - e^{7t} \cos t + 1 \right] ,$$

si ha

$$v(t) = \frac{1}{7} e^{3t} (1 - \cos t) - \frac{1}{350} \left[7e^{3t} \operatorname{sen} t - e^{3t} \cos t + e^{-4t} \right] .$$

L'integrale generale dell'equazione data è

$$y(t) = Ae^{3t} + Be^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t} (1 - \cos t) - \frac{1}{350} \left[7e^{3t} \operatorname{sen} t - e^{3t} \cos t + e^{-4t} \right] .$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - 4B = 0 \, , \end{cases}$$

da cui $A = 4/7$ e $B = 3/7$. Allora la soluzione cercata è

$$y(t) = \frac{4}{7} e^{3t} + \frac{3}{7} e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t} (1 - \cos t) - \frac{1}{350} \left[7e^{3t} \operatorname{sen} t - e^{3t} \cos t + e^{-4t} \right] .$$