Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2013/2014

Quarto appello

N.B.: È omesso lo svolgimento delle domande di teoria.

Esercizio 1

Sia data la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy \operatorname{sen} x + (2x+3y)(x^2+y^2)}{2x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Si studino continuità, derivabilità e differenziabilità di f in $(0,0)$.

Svolgimento

Essendo $2x^2+y^2 \geq x^2+y^2$, per $(x,y) \neq (0,0)$ si trova

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{|xy|}{2x^2+y^2}|\operatorname{sen} x| + |2x+3y|\frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2} \leq \frac{|xy|}{x^2+y^2}|\operatorname{sen} x| + |2x+3y| \\ &\leq \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x| + |2x+3y| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (0,0)\,. \end{aligned}$$

Allora $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ per $(x,y) \to (0,0)$, e quindi f è continua in $(0,0)$. Per la derivabilità osserviamo che

$$f(x,0) = x\,, \qquad f(0,y) = 3y\,,$$

da cui si deduce che f è derivabile in $(0,0)$ con $\partial_x f(0,0) = 1$ e $\partial_y f(0,0) = 3$. Quanto alla differenziabilità, bisogna calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \operatorname{sen} x + xy(y-3x)}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Se prendiamo la restrizione $y = 3x$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen} x}{11\sqrt{10}x^2|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{sen} x}{11\sqrt{10}|x|}\,,$$

che non esiste perché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3 \operatorname{sen} x}{11\sqrt{10}|x|} = \frac{3}{11\sqrt{10}}\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{3 \operatorname{sen} x}{11\sqrt{10}|x|} = -\frac{3}{11\sqrt{10}}\,.$$

Se ne deduce che f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 4xyz\,\mathbf{i} + 2x^2z\,\mathbf{j} + (2x^2y + z^3)\,\mathbf{k}\,.$$

1. Calcolare $\operatorname{rot} \mathbf{F}$.

2. Calcolare la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo il circuito $(\gamma, \mathbf{r})$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = \left((t-2\pi)e^{2t}\arctan t,\ \operatorname{sen} t \ln(1+t^2),\ (1-\cos t)e^{\cos(3\pi t)}\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, \quad 1 \le z \le 2\right\},$$

orientata in modo che il versore normale abbia terza componente negativa.

Svolgimento

1. Si ottiene

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 4xyz & 2x^2z & 2x^2y + z^3 \end{pmatrix} \\ &= \left[\partial_y(2x^2y + z^3) - \partial_z(2x^2z)\right]\mathbf{i} - \left[\partial_x(2x^2y + z^3) - \partial_z(4xyz)\right]\mathbf{j} + \\ &\quad + \left[\partial_x(2x^2z) - \partial_y(4xyz)\right]\mathbf{k} = (0,0,0).\end{aligned}$$

2. Si verifica facilmente che il circuito $(\gamma, \mathbf{r})$ è regolare a tratti. Poiché $\mathbf{F}$ è irrotazionale ed è definito su un insieme semplicemente connesso, è conservativo. Se ne deduce che la circuitazione richiesta è nulla.

3. Dette

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, \quad z = 1\right\}, \qquad \Sigma_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4, \quad z = 2\right\},$$

grazie al teorema della divergenza si ha

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)\, dxdydz - \Phi(\mathbf{F}, \Sigma_1) - \Phi(\mathbf{F}, \Sigma_2),$$

dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2, \quad 1 \le z \le 2\right\},$$

e Σ_1 e Σ_2 sono orientate con $-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}$, rispettivamente. Osservando che, per ragioni di simmetria,

$$\iiint_D 4yz\, dxdydz = 0$$

ed integrando per strati, si ottiene

$$\begin{aligned}\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)\, dxdydz &= \iiint_D (4yz + 3z^2)\, dxdydz = \iiint_D 3z^2\, dxdydz \\ &= 3\int_1^2 \left(\iint_{B_z(0,0)} z^2\, dxdy\right) dz = 3\pi \int_1^2 z^4\, dz = \frac{93}{5}\pi.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma_1) = -\iint_{B_1(0,0)} (2x^2y + 1)\, dxdy = -\pi$$

e

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma_2) = \iint_{B_2(0,0)} (2x^2y + 8)\, dxdy = 32\pi.$$

Allora

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \frac{93}{5}\pi + \pi - 32\pi = -\frac{62}{5}\pi.$$

Esercizio 3

Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{2x+3y^2-(z-1)^2}\, dr\,,$$

dove $(\gamma, \mathbf{r})$ è la la curva parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t, 2t+1)\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Svolgimento

Poiché

$$\mathbf{r}'(t) = (2t, 1, 2)\,, \qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4t^2+5}\,,$$

si ottiene

$$\int_\gamma \sqrt{2x+3y^2-(z-1)^2}\, dr = \int_0^1 \sqrt{2t^2+3t^2-4t^2}\sqrt{4t^2+5}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{4t^2+5}\, dt$$

$$= \frac{1}{12}(4t^2+5)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{27-5^{3/2}}{12}\,.$$

Esercizio 4

Sia dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\,. \tag{1}$$

1. Si calcoli una matrice wronskiana per il sistema lineare omogeneo associato a (1).
2. Si calcoli l'integrale generale del sistema (1).
3. Si calcoli la soluzione di (1) con dato iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

Svolgimento

1. Calcoliamo autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Si ottiene

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-7)(\lambda-1)-16 = \lambda^2-8\lambda-9\,,$$

da cui

$$\det(A-\lambda I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2-8\lambda-9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -1 \text{ o } \lambda = 9\,,$$

che sono gli autovalori di A. Per calcolare gli autovettori devono essere verificate

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,, \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Per la prima si ottiene che deve valere $y = -2x$, per la seconda $x = 2y$, e quindi $(1, -2)$ è autovettore relativo a $\lambda = -1$, mentre $(2, 1)$ è autovettore relativo a $\lambda = 9$. Una base di soluzioni per il sistema omogeneo associato è data dalle funzioni

$$\mathbf{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} = \begin{pmatrix} 2e^{9t} \\ e^{9t} \end{pmatrix}.$$

Una matrice wronskiana ha per colonne $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e quindi si scrive

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{9t} \\ -2e^{-t} & e^{9t} \end{pmatrix}.$$

2. Per calcolare l'integrale generale, dobbiamo procurarci una soluzione particolare. Con il metodo della variazione delle costanti questa si scrive

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t [\mathbf{W}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} ds\,.$$

Poiché

$$[\mathbf{W}(s)]^{-1} = \frac{1}{5e^{8s}} \begin{pmatrix} e^{9s} & -2e^{9s} \\ 2e^{-s} & e^{-s} \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t \frac{1}{5e^{8s}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5se^{-s} \end{pmatrix} ds = \mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ se^{-9s} \end{pmatrix} ds\,. \tag{2}$$

Calcolando

$$\int_0^t se^{-9s}\, ds = -\frac{1}{9} se^{-9s}\Big|_0^t + \frac{1}{9}\int_0^t e^{-9s}\, ds = -\frac{1}{9}te^{-9t} - \frac{1}{81}(e^{-9t} - 1)\,,$$

ed utilizzando quanto ottenuto in (2), si ha

$$\mathbf{v}(t) = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{9t} \\ -2e^{-t} & e^{9t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9te^{-9t} + e^{-9t} - 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} 18t + 2 - 2e^{9t} \\ 9t + 1 - e^{9t} \end{pmatrix}.$$

Allora l'integrale generale del sistema dato si scrive

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{9t} \\ -2e^{-t} & e^{9t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 18t + 2 - 2e^{9t} \\ 9t + 1 - e^{9t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + 2c_2e^{9t} - \frac{2}{9}t - \frac{2}{81} + \frac{2}{81}e^{9t} \\ -2c_1e^{-t} + c_2e^{9t} - \frac{1}{9}t - \frac{1}{81} + \frac{1}{81}e^{9t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene che devono valere

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = -1 \\ -2c_1 + c_2 = 0\,, \end{cases}$$

da cui $c_1 = -1/5$ 2 $c_2 = -2/5$. La soluzione cercata è

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}e^{-t} - \frac{4}{5}e^{9t} - \frac{2}{9}t - \frac{2}{81} + \frac{2}{81}e^{9t} \\ \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{9t} - \frac{1}{9}t - \frac{1}{81} + \frac{1}{81}e^{9t} \end{pmatrix},$$