

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 1 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x \leq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0\},$$

ed il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + x \mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si orienti Σ in modo che nel punto $(-2, 0, 0)$ la normale coincida con $-\mathbf{i}$. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ sia tramite un conto diretto, sia utilizzando il teorema del rotore.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y - e^{xy^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Provare che in un intorno di $(1, 0)$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $x = g(y)$.
2. Stabilire se g è crescente o decrescente in un intorno di $y = 0$.
3. Stabilire se g è concava o convessa in un intorno di $y = 0$.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che nel punto (x_0, y_0) soddisfa

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_x f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Provare che, detta $x = g(y)$ la funzione implicitamente definita in un intorno di (x_0, y_0) dall'equazione $f(x, y) = 0$, tale funzione g è derivabile in y_0 e vale $g'(y_0) = -\partial_y f(x_0, y_0) / \partial_x f(x_0, y_0)$.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/14

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 2 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0\},$$

ed il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si orienti Σ in modo che nel punto $(-2, 0, 0)$ la normale coincida con $-\mathbf{i}$. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ sia tramite un conto diretto, sia utilizzando il teorema del rotore.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - x + y^2 - e^{x^2 y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Provare che in un intorno di $(0, 1)$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = g(x)$.
2. Stabilire se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Stabilire se g è concava o convessa in un intorno di $x = 0$.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che nel punto (x_0, y_0) soddisfa

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_x f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Provare che, detta $x = g(y)$ la funzione implicitamente definita in un intorno di (x_0, y_0) dall'equazione $f(x, y) = 0$, tale funzione g è derivabile in y_0 e vale $g'(y_0) = -\partial_y f(x_0, y_0) / \partial_x f(x_0, y_0)$.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/14

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 3 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\},$$

ed il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si orienti Σ in modo che nel punto $(2, 0, 0)$ la normale coincida con $\mathbf{i}$. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ sia tramite un conto diretto, sia utilizzando il teorema del rotore.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = e^{-x^2y} + x^2 + x - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Provare che in un intorno di $(0, 1)$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = g(x)$.
2. Stabilire se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Stabilire se g è concava o convessa in un intorno di $x = 0$.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che nel punto (x_0, y_0) soddisfa

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_x f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Provare che, detta $x = g(y)$ la funzione implicitamente definita in un intorno di (x_0, y_0) dall'equazione $f(x, y) = 0$, tale funzione g è derivabile in y_0 e vale $g'(y_0) = -\partial_y f(x_0, y_0) / \partial_x f(x_0, y_0)$.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30

Fondamenti di Analisi Matematica 2 per IPIM-IEN-ICM, 27/01/14

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Tema 4 (esercizi con svolgimento)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0\},$$

ed il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si orienti Σ in modo che nel punto $(2, 0, 0)$ la normale coincida con $\mathbf{i}$. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ sia tramite un conto diretto, sia utilizzando il teorema del rotore.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = e^{-xy^2} - x^2 + y^2 - y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Provare che in un intorno di $(1, 0)$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $x = g(y)$.
2. Stabilire se g è crescente o decrescente in un intorno di $y = 0$.
3. Stabilire se g è concava o convessa in un intorno di $y = 0$.

Domanda facoltativa

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che nel punto (x_0, y_0) soddisfa

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_x f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Provare che, detta $x = g(y)$ la funzione implicitamente definita in un intorno di (x_0, y_0) dall'equazione $f(x, y) = 0$, tale funzione g è derivabile in y_0 e vale $g'(y_0) = -\partial_y f(x_0, y_0) / \partial_x f(x_0, y_0)$.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30