

Cognome e Nome Matr.

Il candidato deve riconsegnare questo foglio, assieme al foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Il solo possesso di un telefono cellulare, anche spento, è motivo di esclusione dalla prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata sul foglio intestato.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ze^y \cos(xz) \mathbf{i} + e^y \sin(xz) \mathbf{j} + [xe^y \cos(xz) + 2z] \mathbf{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e il circuito $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzato da

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

1. Calcolare $\text{rot } \mathbf{F}$.
2. Se $\mathbf{F}$ è conservativo, calcolare un potenziale U di $\mathbf{F}$.
3. Calcolare la circuitazione lungo γ del campo vettoriale

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + (\cos y^2, x^3 y^2 + \sin x^2, 0).$$

Sugg.: calcolare un opportuno flusso attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 2 [6 punti]

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 0 \\ e^{4t} \end{pmatrix} \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

1. Verificare che

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^t & e^{3t} \\ -1 & -e^t & e^{3t} \\ 1 & 0 & 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

è una matrice wronskiana del sistema lineare omogeneo associato a (*).

2. Risolvere il problema di Cauchy (*).

Domanda facoltativa

1. Si enunci e dimostri il teorema sui moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
2. Si illustri il legame tra i punti critici vincolati in un problema di estremo vincolato ed i punti critici liberi della corrispondente lagrangiana.

N.B.: la risposta a tale quesito verrà corretta solo a chi ottiene almeno 28/30