Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2014/2015
Primo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Indicare

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale dell'equazione non omogenea data;
3. la soluzione del problema di Cauchy dato.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
2. $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \dfrac{1}{2} t^2 e^t\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
3. $y(t) = e^t + \dfrac{1}{2} t^2 e^t.$

Esercizio 2

Siano dati la funzione definita da

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 8 \right\}.$$

Indicare

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati alla frontiera di D.

Risposte

1. $(0,0)$, $(-2,1)$, $(2,1)$.
2. $(0,0)$ è di minimo, gli altri sono di sella.
3. $(0,\sqrt{8})$, $(0,-\sqrt{8})$, $(\sqrt{56}/3, 4/3)$, $(-\sqrt{56}/3, 4/3)$, $(2,-2)$, $(-2,-2)$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Indicare

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale dell'equazione non omogenea data;
3. la soluzione del problema di Cauchy dato.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
2. $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \dfrac{1}{2} t^2 e^{2t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
3. $y(t) = e^{2t} - t e^{2t} + \dfrac{1}{2} t^2 e^{2t}.$

Esercizio 2

Siano dati la funzione definita da

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy^2\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8 \right\}.$$

Indicare

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati alla frontiera di D.

Risposte

1. $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$.
2. $(0, 0)$ è di minimo, gli altri sono di sella.
3. $(\sqrt{8}, 0)$, $(-\sqrt{8}, 0)$, $(4/3, \sqrt{56}/3)$, $(4/3, -\sqrt{56}/3)$, $(-2, -2)$, $(-2, 2)$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Indicare

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale dell'equazione non omogenea data;
3. la soluzione del problema di Cauchy dato.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
2. $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \dfrac{1}{2} t^2 e^{-2t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
3. $y(t) = e^{-2t} + 3t e^{-2t} + \dfrac{1}{2} t^2 e^{-2t}.$

Esercizio 2

Siano dati la funzione definita da

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\right\}.$$

Indicare

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati alla frontiera di D.

Risposte

1. $(0,0)$, $(1, -\sqrt{2})$, $(1, \sqrt{2})$.
2. $(0,0)$ è di minimo, gli altri sono di sella.
3. $(4,0)$, $(-4,0)$, $(4/\sqrt{3}, \sqrt{32/3})$, $(4/\sqrt{3}, -\sqrt{32/3})$, $(-4/\sqrt{3}, \sqrt{32/3})$, $(-4/\sqrt{3}, -\sqrt{32/3})$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-t} \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Indicare

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale dell'equazione non omogenea data;
3. la soluzione del problema di Cauchy dato.

Risposte

1. $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
2. $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
3. $y(t) = e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$

Esercizio 2

Siano dati la funzione definita da

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 16 \right\}.$$

Indicare

1. i punti critici di f interni a D;
2. la natura dei punti critici di f interni a D;
3. i punti critici di f vincolati alla frontiera di D.

Risposte

1. $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, 1)$.
2. $(0, 0)$ è di minimo, gli altri sono di sella.
3. $(0, 4)$, $(0, -4)$, $(\sqrt{32/3}, 4/\sqrt{3})$, $(-\sqrt{32/3}, 4/\sqrt{3})$, $(\sqrt{32/3}, -4/\sqrt{3})$, $(-\sqrt{32/3}, -4/\sqrt{3})$.

Esercizi con svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Siano dati la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4\,,\ x \le 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \le 0\}\,,$$

ed i campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j}\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Si orienti Σ in modo che nel punto $(-2,0,0)$ la normale coincida con $-\mathbf{i}$. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ sia tramite un conto diretto, sia utilizzando il teorema del rotore.

Svolgimento

La superficie Σ è la porzione di sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 rappresentata in figura 1. Si ha

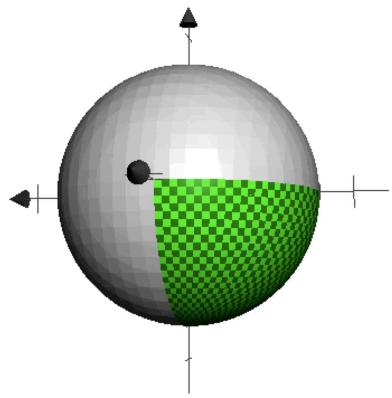

Figura 1: La superficie Σ (in verde). L'asse y è quello diretto verso il lettore.

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & z & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{i}\,.$$

Parametrizziamo Σ come una superficie cartesiana

$$\mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, -\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\,, \qquad (x,y) \in D\,,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\,,\ x \le 0\,,\ y \ge 0\}\,.$$

Si osservi che la normale definita dalla parametrizzazione $\mathbf{r}$ è opposta a quella data. Allora

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{F};\Sigma) &= -\iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \left(\partial_x\mathbf{r}(x,y) \times \partial_y\mathbf{r}(x,y)\right) dxdy \\ &= \iint_D \mathbf{i} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dxdy = -\iint_D \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy\,.\end{aligned}$$

Passando in coordinate polari e ponendo

$$D' = \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 2\,,\ \pi/2\le\vartheta\le\pi\big\}\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{F};\Sigma) &= -\iint_{D'}\frac{\rho^2\cos\vartheta}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho d\vartheta = -\int_0^2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\rho^2\cos\vartheta}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho d\vartheta\\ &= -\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_0^2\frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho\right) = -\rho\sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^2 + \int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho = \pi\,.\end{aligned}$$

Alternativamente, si può parametrizzare Σ con

$$\mathbf{s}(y,z) = \big(-\sqrt{4-y^2-z^2}, y, z\big)\,,\qquad (x,y)\in\Omega\,,$$

dove

$$\Omega = \big\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : y^2+z^2\le 4\,,\ y\ge 0\,,\ z\le 0\big\}\,.$$

Allora

$$\partial_y\mathbf{s}\times\partial_z\mathbf{s}(y,z) = \mathbf{i} - \frac{y}{\sqrt{4-y^2-z^2}}\mathbf{j} - \frac{z}{\sqrt{4-y^2-z^2}}\mathbf{k}$$

cosicché

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{s}(y,z))\cdot(\partial_y\mathbf{s}\times\partial_z\mathbf{s})(y,z) = -1 \qquad \forall\,(y,z)\in\Omega\,.$$

Dopo aver osservato che l'orientazione di Σ indotta dalla parametrizzazione $\mathbf{s}$ è opposta a quella data, si ottiene

$$\Phi(\mathbf{F};\Sigma) = -\iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{s}(y,z))\cdot(\partial_y\mathbf{s}\times\partial_z\mathbf{s})(y,z)\,dydz = \iint_\Omega dxdy = \pi\,.$$

Per calcolare lo stesso flusso con il teorema del rotore, dobbiamo procurarci una parametrizzazione del bordo orientato $\partial^+\Sigma$ di Σ. Si osservi che tale bordo è una curva regolare a tratti formata da tre archi di circonferenza giacenti sui tre piani coordinati:

1. quello sul piano $x=0$ (il piano yz), di centro $(0,0,0)$, raggio 2 e contenuto nel quadrante $y\ge 0$, $z\le 0$;

2. quello sul piano $y=0$ (il piano xz), di centro $(0,0,0)$, raggio 2 e contenuto nel quadrante $x\le 0$, $z\le 0$;

3. quello sul piano $z=0$ (il piano xy), di centro $(0,0,0)$, raggio 2 e contenuto nel quadrante $x\le 0$, $y\ge 0$.

I tre archi vanno orientati in modo che siano visti percorsi in senso antiorario da un osservatore diretto come la normale, che in tal caso ha terza componente non positiva. Allora si ha, rispettivamente

1. $\mathbf{s}_1(\vartheta) = (0, -2\operatorname{sen}\vartheta, -2\cos\vartheta)$, $\vartheta\in[-\pi/2, 0]$;

2. $\mathbf{s}_2(\vartheta) = (2\operatorname{sen}\vartheta, 0, 2\cos\vartheta)$, $\vartheta\in[-\pi,-\pi/2]$;

3. $\mathbf{s}_3(\vartheta) = (-2\operatorname{sen}\vartheta, -2\cos\vartheta, 0)$, $\vartheta\in[\pi/2,\pi]$.

Allora

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{F};\Sigma) &= \oint_{\partial^+\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} \mathbf{F}(\mathbf{s}_1(\vartheta))\cdot \mathbf{s}_1'(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{-\pi}^{-\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{s}_2(\vartheta))\cdot \mathbf{s}_2'(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\pi/2}^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{s}_3(\vartheta))\cdot \mathbf{s}_3'(\vartheta)\,d\vartheta \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} (1,-2\cos\vartheta,0)\cdot(0,-2\cos\vartheta,2\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta + \\
&\quad + \int_{-\pi}^{-\pi/2} (1,2\cos\vartheta,0)\cdot(2\cos\vartheta,0,-2\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1,0,0)\cdot(-2\cos\vartheta,2\operatorname{sen}\vartheta,0)\,d\vartheta \\
&= 4\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2\vartheta\,d\vartheta + 2\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos\vartheta\,d\vartheta - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\vartheta\,d\vartheta = \pi\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2 - e^{x^2 y}\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

1. Provare che in un intorno di $(0,1)$ l'equazione $f(x,y)=0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y=g(x)$.
2. Stabilire se g è crescente o decrescente in un intorno di $x=0$.
3. Stabilire se g è concava o convessa in un intorno di $x=0$.

Svolgimento

1. f è di classe $\mathcal{C}^\infty$, si ha $f(0,1)=0$ e

   $$\partial_y f(x,y) = 2y - x^2 e^{x^2 y} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_y f(0,1) = 2 \neq 0\,.$$

   Il teorema di Dini garantisce l'esistenza di g, che eredita la stessa regeolarità di f.

2. Si ha

   $$g'(0) = -\frac{\partial_x f(0,1)}{\partial_y f(0,1)}\,.$$

   Poiché

   $$\partial_x f(x,y) = 2x - 1 - 2xye^{x^2 y} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_x f(0,1) = -1\,,$$

   si ottiene

   $$g'(0) = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2} > 0\,,$$

   e quindi g è crescente in un intorno di $x=0$.

3. Poiché

   $$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))}\,,$$

   si ha

   $$\begin{aligned}
   g''(x) = -\frac{1}{[\partial_y f(x,g(x))]^2}\big[\partial^2_{xx} f(x,g(x)) + \partial^2_{yx} f(x,g(x))g'(x)\big]\partial_y f(x,g(x)) + \\
   - \partial_x f(x,g(x))\big[\partial^2_{xy} f(x,g(x)) + \partial^2_{yy} f(x,g(x))g'(x)\big]\,.
   \end{aligned}$$

A noi serve $g''(0)$. Essendo $g(0) = 1$, $g'(0) = 1/2$ e

$$\begin{aligned}
&\partial^2_{xx} f(x,y) = 2 - 2ye^{x^2y} - 4x^2ye^{x^2y} &&\implies \quad \partial^2_{xx} f(0,1) = 0\\
&\partial^2_{yy} f(x,y) = 2 - x^4ye^{x^2y} &&\implies \quad \partial^2_{yy} f(0,1) = 2\\
&\partial^2_{yx} f(x,y) = \partial^2_{xy} f(x,y) = -2xe^{x^2y} - 2x^3ye^{x^2y} &&\implies \quad \partial^2_{yx} f(0,1) = \partial^2_{xy} f(0,1) = 0\,,
\end{aligned}$$

si ottiene

$$g''(0) = \frac{\partial_x f(0,1)\partial^2_{yy} f(0,1) g'(0)}{[\partial_y f(0,1)]^2} = -\frac{1}{4} < 0\,,$$

e quindi g è concava in un intorno di $x = 0$.