Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2014/2015
Secondo appello

Esercizi senza svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Si consideri
$$\iint_D \frac{6xy}{4x^2+9y^2}\, dxdy\,,$$
dove
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \le 1\,,\ 0 \le x \le 3y/2\right\}.$$
Indicare

1. un cambio di coordinate che trasformi D in un rettangolo;
2. il determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui sopra;
3. il valore dell'integrale.

Risposte

1. $$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{2}\cos\vartheta \\ y = \dfrac{\rho}{3}\operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le 1\,, \vartheta \in [\pi/4, \pi/2]\,.$$
2. $\rho/6$.
3. $1/48$.

Esercizio 2

Siano dati il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy + 2xz,\ z + x^2/2,\ x^2 + y)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$
e l'elica cilindrica $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0,\pi]$. Indicare

1. il valore di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$;
2. se $\mathbf{F}$ è conservativo, un potenziale U di $\mathbf{F}$;
3. il lavoro fatto lungo γ dal campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) - (yz, 0, 0)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Risposte

1. $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $U(x,y,z) = x^2y/2 + x^2z + yz$.
3. $\pi + \pi^2/4$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 2

Esercizio 1

Si consideri

$$\iint_D \frac{xy}{9x^2 + y^2}\, dxdy\,,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + y^2 \le 1\,,\ 0 \le y \le 3x\right\}.$$

Indicare

1. un cambio di coordinate che trasformi D in un rettangolo;
2. il determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui sopra;
3. il valore dell'integrale.

Risposte

1.
$$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{3}\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta\,, \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le 1\,, \vartheta \in [0, \pi/4]\,.$$
2. $\rho/3$.
3. $1/72$.

Esercizio 2

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y - z^2,\ x + z^2/2,\ yz - 2xz)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

e l'elica cilindrica $\gamma = (\mathbf{r}, \Gamma)$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, \pi]$. Indicare

1. il valore di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$;
2. se $\mathbf{F}$ è conservativo, un potenziale U di $\mathbf{F}$;
3. il lavoro fatto lungo γ dal campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) - (0, xz, 0)\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Risposte

1. $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $U(x,y,z) = xy - xz^2 + yz^2/2$.
3. $3\pi^2/4$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 3

Esercizio 1

Si consideri
$$\iint_D \frac{xy}{x^2+4y^2}\,dxdy\,,$$
dove
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2\le 1\,,\ 0\le x\le 2\sqrt{3}\,y\right\}.$$
Indicare

1. un cambio di coordinate che trasformi D in un rettangolo;
2. il determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui sopra;
3. il valore dell'integrale.

Risposte

1. $$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \dfrac{\rho}{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \end{cases} \qquad 0\le\rho\le 1\,, \vartheta\in[\pi/6,\pi/2]\,.$$
2. $\rho/2$.
3. $3/64$.

Esercizio 2

Siano dati il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z-y^2/2,\ 2yz-xy,\ y^2+x)\,, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$
e l'elica cilindrica $\gamma=(\mathbf{r},\Gamma)$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t)=(\cos t, t, \mathrm{sen}\, t)$, $t\in[0,\pi]$. Indicare

1. il valore di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$;
2. se $\mathbf{F}$ è conservativo, un potenziale U di $\mathbf{F}$;
3. il lavoro fatto lungo γ dal campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + (0,0,xy)\,, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Risposte

1. $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
2. $U(x,y,z) = xz - xy^2/2 + y^2 z$.
3. $3\pi^2/4$.

Esercizi senza svolgimento - Tema 4

Esercizio 1

Si consideri
$$\iint_D \frac{12xy}{9x^2+4y^2}\,dxdy\,,$$
dove
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9x^2+4y^2 \le 1\,,\ 0\le y\le \sqrt{3}\,x/2\right\}.$$
Indicare

1. un cambio di coordinate che trasformi D in un rettangolo;
2. il determinante della matrice jacobiana del cambio di coordinate di cui sopra;
3. il valore dell'integrale.

Risposte

1. $$\begin{cases} x = \dfrac{\rho}{3}\cos\vartheta \\ y = \dfrac{\rho}{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,, \end{cases} \qquad 0\le\rho\le 1\,, \vartheta\in[0,\pi/6]\,.$$
2. $\rho/6$.
3. $1/48$.

Esercizio 2

Siano dati il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-2xy - xz,\ z - x^2,\ y - x^2/2)\,,\qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$
e l'elica cilindrica $\gamma = (\mathbf{r},\Gamma)$ parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (t,\cos t,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[0,\pi]$. Indicare

1. il valore di $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$;
2. se $\mathbf{F}$ è conservativo, un potenziale U di $\mathbf{F}$;
3. il lavoro fatto lungo γ dal campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + (0,xz,0)\,,\qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Risposte

1. $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
2. $U(x,y,z) = -x^2y - x^2z/2 + yz$.
3. $3\pi^2/4$.

Esercizi con svolgimento - Tema 1

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+4x^3}{2x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiarne continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.

Svolgimento

Per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2y+4x^3|}{2x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{2x^2+y^2}|y| + 4\frac{x^2}{2x^2+y^2}|x| \leq \frac{1}{2}|y| + 2|x| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$, da cui $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$ per il teorema dei due carabinieri. Quindi f è continua in $(0,0)$. Riguardo alla drivabilità si osservi che

$$f(x,0) = 2x\,, \qquad f(0,y) = 0\,,$$

per ogni (x,y), da cui si deduce che f è derivabile in $(0,0)$ con $\partial_x f(0,0) = 2$ e $\partial_y f(0,0) = 0$. Da questo si deduce che affinché f sia differenziabile in $(0,0)$ deve essere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)x - \partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Poiché

$$\frac{f(x,y)-2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y - 2xy^2}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

prenendo la restrizione lungo la retta $y = x$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{3\sqrt{2}x^2|x|} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{3\sqrt{2}|x|}\,,$$

che non esiste. Allora f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \\ x(0) = 1\,, \qquad y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Svolgimento

Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4\,,$$

e quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$. I rispettivi autospazi si possono ricavare dalle relazioni

$$x + 2y = -x \qquad \text{e} \qquad x + 2y = 4x\,,$$

e quindi una coppia di autovettori è data da $\mathbf{v}_1 = (1,-1)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,3)$. Qundi una matrice wronskiana del sistema lineare omogeneo associato è

$$\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix}.$$

La sua matrice inversa è

$$[\mathbf{W}(t)]^{-1} = \frac{1}{5e^{3t}} \begin{pmatrix} 3e^{4t} & -2e^{4t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{t} & -2e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo è

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{W}(t) \int_0^t [\mathbf{W}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \frac{1}{5}\mathbf{W}(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 3e^{5s} - 2 \\ 1 + e^{-5s} \end{pmatrix} ds = \frac{1}{5}\mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} 3(e^{5t}-1)/5 - 2t \\ t - (e^{-5t} - 1)/5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(e^{5t}-1) - 10t \\ 5t - (e^{-5t} - 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3(e^{4t} - e^{-t} - 10te^{-t} + 10te^{4t} - 2(e^{-t} - e^{4t} \\ 3(e^{-t} - e^{4t} + 10te^{-t} + 15te^{4t} - 3(e^{-1} - e^{4t}) \end{pmatrix}$$

L'integrale generale del sistema non omogeneo è allora

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t)\,.$$

Adesso sfruttiamo le condizioni iniziali. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + 2c_2 = 1 \\ y(0) = -c_1 + 3c_2 = 1\,, \end{cases}$$

da cui si ricava $c_1 = 1/5$ e $c_2 = 2/5$. La soluzione cercata è allora

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}/5 + 4e^{4t}/5 \\ -e^{-t}/5 + 6e^{4t}/5 \end{pmatrix} + \mathbf{v}(t)\,.$$