

Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2014/2015

Terzo appello

Esercizi senza svolgimento

Esercizio 1

Siano dati la funzione $f(x, y, z) = yz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e l'insieme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Indicare:

1. i punti critici vincolati di f in Γ ;
2. i punti di minimo di f in Γ ;
3. i punti di massimo di f in Γ .

Risposte

1. $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
2. Punti di minimo: $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
3. Punti di massimo: $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Esercizio 2

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Indicare:

1. l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
2. l'integrale generale dell'equazione data;
3. la soluzione del problema di Cauchy.

Risposte

1. $y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$.
2. $y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$.
3. $y(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t}$.

Esercizi con svolgimento

Esercizio 1

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } y \neq 0, \\ x & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

1. Si trovi l'insieme dei punti in cui f è discontinua.
2. Si stabilisca se f è derivabile in $(0, 0)$.
3. Si stabilisca se f è differenziabile in $(0, 0)$.

Svolgimento

1. f è certamente continua al di fuori dell'asse x . Per la continuità di f nei punti dell'asse x deve valere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} x^2 + y^2 = x_0,$$

e quindi $x_0^2 = x_0$, da cui $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$. Quindi f è discontinua in tutti i punti dell'asse x esclusi $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

2. Si ha $f(x, 0) = x$ e $f(0, y) = y^2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Tali funzioni, $x \mapsto f(x, 0)$ e $y \mapsto f(0, y)$ sono derivabili, e quindi tale è f in $(0, 0)$ e valgono $\partial_x f(0, 0) = 1$ e $\partial_y f(0, 0) = 0$.
3. Affinché f sia differenziabile in $(0, 0)$ deve essere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)x - \partial_y f(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Prendendo la restrizione lungo la retta $y = x$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{\sqrt{2}|x|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|},$$

che non esiste. Allora f non è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2yz^2 \mathbf{i} + (2xz^2 + y^3) \mathbf{j} + 4xyz \mathbf{k}.$$

1. Calcolare, se esiste, un potenziale di $\mathbf{F}$.
2. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $(\gamma, \mathbf{r})$ parametrizzata da

$$\mathbf{r}(t) = (t + t^2, t(t - 1) \sin e^t + t, 2t + 1), \quad t \in [0, 1].$$

3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \quad -1 < z < 2\},$$

orientata in modo che il versore normale in $(0, 2, 0)$ sia $\mathbf{j}$.

Svolgimento

1. Se U è un potenziale di F , deve essere

$$\begin{cases} \partial_x U = 2yz^2 \\ \partial_y U = 2xz^2 + y^3 \\ \partial_z U = 4xyz. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene

$$U(x, y, z) = 2xyz^2 + C(y, z).$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$2xz^2 + y^3 = 2xz^2 + \partial_y C(y, z) \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_y C(y, z) = y^3$$

da cui $C(y, z) = y^4/4 + D(z)$ e quindi

$$U(x, y, z) = 2xyz^2 + y^4/4 + D(z).$$

Utilizzando l'ultima equazione si ottiene facilmente che $D'(z) = 0$, e quindi un potenziale cercato è

$$U(x, y, z) = 2xyz^2 + y^4/4.$$

2. Si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(1)) - U(\mathbf{r}(0)) = U(2, 1, 3) - U(0, 0, 1) = 36 + 1/4 = 145/4.$$

3. Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad -1 < z < 2\}.$$

Ω è un cilindro che ha per asse l'asse z e di cui Σ è la superficie laterale orientata con la normale esterna. Dette

$$\Sigma_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = -1\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 2\},$$

le basi del cilindro Ω orientate con normale $-\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}$, rispettivamente, per il teorema di Gauss si ha

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \Phi(\mathbf{F}, \Sigma) + \Phi(\mathbf{F}, \Sigma_{-1}) + \Phi(\mathbf{F}, \Sigma_2).$$

Poiché

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 3y^2 + 4xy,$$

si ha, per ragioni di simmetria e integrando per strati con un successivo cambiamento di variabili,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz &= \iiint_{\Omega} 3y^2 \, dx dy dz = \int_{-1}^2 \left(\iint_{B_2(0,0)} 3y^2 \, dx dy \right) dz \\ &= 9 \int_{[0,2] \times [0,2\pi]} \rho^3 \sin^2 \vartheta \, d\rho d\vartheta = 9 \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \right) = 36\pi. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma_{-1}) = \int_{B_2(0,0)} 4xy \, dx dy = 0, \quad \Phi(\mathbf{F}, \Sigma_2) = \int_{B_2(0,0)} 8xy \, dx dy = 0,$$

sempre per ragioni di simmetria. Allora

$$\Phi(\mathbf{F}, \Sigma) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = 36\pi.$$